



56292

I

P



56292

I

XII. 1. 32

V. 3. 15.

~~12.~~

GR

SZKO

Cena opira

w DR

GEOMETRYA

D L A

SZKOŁ NARODOWYCH.

C Z E Ś Ć I.

Cena oprawy w papier Zł. 3. Gr. 15.

W Drukarni Nadwornej J. K. Mci

Roku 1780.

Dzieło: *Geometrya*, ułożone [przez J. P. Lhuillier Obywatela Genewęńskiego, w Towarzystwo Nauk w tymże Mieście ustanowione policzonego, które za ogłoszonym w Polsce, i obcych krajach Uczonych do pisania wezwaniem, z pomiędzy innych, potwierdzenie i nagrodę odebrało, od Towarzystwa do Książ Elementarnych rostrząśnione, a przez J. X. Gawrońskiego Kanonika Koadjutora Krakowskiego Lektora J.K. Mei i w tymże Towarzystwie zasiadającego, na Polski język z Francuskiego przełożone, Szkołom Narodowym do użycia podług przepisów naszych podajemy. W Warszawie dnia 30. Października Roku 1780.

JGNACY Xżę MASSALSKI Biskup Wil. Prezy;
MICHAŁ Xżę PONIATOWSKI Biskup Płocki
AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wwda Kaliski
JOACHIM CHREPTOWICZ Podkan. W.X.L.
MICHAŁ MNISZECH Sekretarz W. L.
HYACYNŁ MAŁACHOWSKI Referen: Kor.
JGNACY POTOCKI Pifarz W. W. X. L.
ADAM Xżę CZARTORYSKI Gene. Ziem. Po.
JĘDRZEY MOKRONOSKI G. Ins. Woy. K.
STANISŁAW Xżę PONIATOWSKI G. Lieut
W. K.

FRANCISZEK BIELINSKI Stta Czerłski
ANDRZEY ZAMOYSKI Kaw. Or. Orła Bia.

BIBLIOTHECA
VNIW. POLON.
CRACOVENSIS



910 837 I/1

ZBIOR
RO

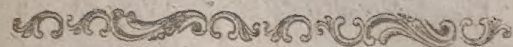
Wiad
prostyck

O prz
stosowa
gadnień.

O Lin
ległobok

O Ka
a w szcze

O Row
równych
nieniu iak
ney, na



ZBIOR RZECZY ZAWARTYCH W
ROZDZIAŁACH TEY KSIĘGI.

ROZDZIAŁ I.

Wiadomości początkowe o Linjach
prostych, o Obwodzie koła. i o Kątach.
Karta. I.

ROZDZIAŁ II.

O przystawianiu Troykątów, z przy-
stosowaniem do rozwiązania wielu Za-
gadnień. 15

ROZDZIAŁ III.

O Linjach równoodległych, i o Równo-
ległobokach 42.

ROZDZIAŁ IV.

O Kątach w Figurach prostokreślnych,
a w szczególności w Troykątach 52.

ROZDZIAŁ V.

O Równoległobokach, i Troykątach
równych co do Powierzchni; i o zamie-
nieniu iakieykolwiek Figury prostokreśl-
ney, na Tróykąt, i na Równoległobok 63.

Przy-

Przystosowanie do Rozdziałów następujących.

O podnieśieniu liczby do Kwadratu, i wyciągnięciu z niej pierwiastku Kwadratowego - - - 87.

ROZDZIAŁ VI.

O Dodawaniu, i odejmowaniu Kwadratów, i zamienianiu ich, na jakiegolwiek Figury prostopiętnej - - 120.

ROZDZIAŁ VII.

O Liniach stycznych z kołem; o Kątach przy okręgu Koła; i o Kątach, których wierzchołki są między okręgiem, albo za okręgiem - - 145.

ROZDZIAŁ VIII.

Wstęp do Proporcji, przez przykłady Geometryczne, z przystosowaniem w szczególności do Trójkątów podobnych, a w ogólności do innych Figur prostopiętnych, także podobnych - - 167.

ROZDZIAŁ IX.

O stosunkach powierzchni Figur prostopiętnych, w ogólności, a w szczególności o stosunkach Figur podobnych 204

ROZDZIAŁ X.

O Wielokątach foremnych - 261.

Wstęp

Wstęp do Rozdziałów XI, i XII.

O używaniu Przenośnika, Cerkla proporcjonalnego, i o podziale nazwanym Nonniuszem - - - 274.

ROZDZIAŁ XI.

Pierwsze początki Miernictwa - 291.

Przygotowanie do Rozdziału następującego.

O Logarytmach - - 313

ROZDZIAŁ XII.

O Trygonometrii - - 334

PRZYPDATEK I.

Przytóżowania Trygonometrii do różnych działań na gruncie. - 375.

PRZYPDATEK II.

Pierwsze początki równoważenia.

ROZDZIAŁ XIII

O kwadratowaniu koła, czyli o wynalezieniu Powierzchni Koła - 405.

Prześtroga. w Tablicy XIX. Fig. 5. Litera A. tam być powinna, gdzie jest B. a Litera B tam, gdzie jest A.

ZBIOR

ZBIOR SŁÓW POLSKICH,

Albo nowych, albo mniej znanych użytych
w tej Księdze, z przydanemi obok słowa-
mi Łacińskimi toż samo w używaniu
Matematyków znaczącemi.

Peźśrednie	<i>Immediatè</i>
Bok	<i>Latus</i>
Cecha	<i>Characteristica</i>
Celowniki	<i>Dioptrae</i>
Cieniwa	<i>Chorda</i>
Czworokąt	<i>Quadrilaterum</i>
Dopełnienie	<i>Complementum</i>
Dostawa	<i>Cosinus</i>
Dosieczna	<i>Cotangens</i>
Dostyczna	<i>Cotangens</i>
Dowodzenie	<i>Demonstratio</i>
Foremny	<i>Regularis</i>
Ilość	<i>Quantitas</i>
Kąt	<i>Angulus</i>
Kąt ostry	<i>Angulus acutus</i>
Kąt prosty	<i>Angulus rectus</i>
Kąt rostwarty	<i>Angulus obtusus</i>
Kąt wewnętrzny	<i>Angulus internus</i>
Kąt zewnętrzny	<i>Angulus externus</i>
	Kąt

* W niektórych miejscach, w wykładzie
Słów Łacińskich na swoyskie nie trzymaliś-
my się ściśłego tłumaczenia, ale mieliśmy
wzgląd na wyraz i bliższy do dokładnego
rzeczy wystawienia, i stosowniejszy do
mowy Oczyszczonej.

Kąt wysk
Kątomierz
Kąty na
Kąty przy
Kąty prze

Koło C
Kołowy
Kwadrat
Kwadrat
Kwadrowa
Łuk Ar
Następnik
Na odwr
albo
Niepołmi
Obwód
Odcinek
Odwrotny
Okrąg C
Opisać
Oś Axis
Ostrokątny
Pamiętnik
Pierwiaste
Pięciokąt
Pion Pa
Pionowy
Podanie
Podstawa
Podziałka
Poprzedni
Pośrednie

Kąt wyskakujący *Angulus saliens*
Kątomierz *Graphometrum*
Kąty na przemian *Anguli alterni*
Kąty przyległe *Anguli adjacentes*
Kąty przeciwne w wierzchołku *Anguli ad
verticem oppositi*

Koło *Circulus*

Kołowy *Circularis*

Kwadrat *Quadratum*

Kwadrat nkośny *Rhombus*

Kwadrowanie *Quadratura*

Łuk *Arcus*

Następnik *Consequens*

Na odwrot, albo odwrotnie *Inversè
albo in ratione inversa*

Niespolmierny *Incommensurabilis*

Obwód *Perimeter*

Odcinek *Segmentum*

Odwrotny *Inversus*

Okrąg *Circumferentia*

Opisać *Inscribere*

Oś *Axis*

Ostrokątny *Acutangulum*

Pamiętnik *Memoriale*

Pierwiaszek *Radix*

Pięciokąt *Pentagonum*

Pion *Perpendicularum*

Pionowy *Verticalis*

Podanie *Propositio*

Podstawa *Basis*

Podziałka *Scala*

Poprzednik *Antecedens*

Pośrednie *Mediate*

Po-

Powierzchnia *Superficies*
 Powietrzna *Atmosfera*
 Poziemie *Horizontaliter*
 Poziomy *Horizontalis*
 Prawidło *Alidada, albo Regula*
 Promień *Radius*
 Prostokąt *Rectangulum*
 Prostokątny *Rectangulum* nap. *Triangulum*

Srodek
 Stanowisko
 Stolik Ge
 Stopień
 Stofunek
 Stofunek
 Stofunek d
 Stofunek f
 Styczeń
 Sześciokat
 Tośamość
 Troykat
 Twierdze
 Twierdze
 Ukośny
 Warunek
 Wierzcho
 Wieszadło
 Wniosek
 Wpisać
 Włtaw
 Wykładni
 Wyprosto
 Zaśada
 Zagadnien

Środek *Centrum*
 Stanowisko *Statio*
 Stożek Geometryczny *Tabula Protoriana*
 Stopień *Gratus*
 Stożurek *Ratio*
 Stożurek dwudzielny *Ratio subdivisus*
 Stożurek dwumocny *Ratio duplicata*
 Stożurek mieszany *Ratio Composita*
 Stycznia *Tangens*
 Sześciook *Hexagonum*
 Totantose *Totantus*
 Trójkąt *Triangulum*
 Twierdzenie *Theorema*
 Twierdzenie przybrane *Lemma*
 Ukośny *Obliquus*
 Wątroń *Comatus*
 Wierzchołek *Vertex*
 Węzadło *Punctum*
 Wniołek *Corollarium*
 Wstąpić *Infringere*
 Wstawa *Sumus*
 Wykładnik *Exponents*
 Wyprostowanie *Redificatio*
 Zaśada *Principium*
 Zagaśnienie *Problema*

OMYŁ.

OMYŁKI DRUKU

Karta	Wiersz	stoi	Popraw
33	1	potwierdzenie	twierdzenie
43	10	przepisać	na boku Fig. 5.
43	27	CHE	CAE
44	4	CBH	GBH.
47	10		na boku Figura 2.
76	3	DEFC	BEFC.
83	19	<u>39 × 81</u>	<u>39 × 81</u>
86	5	Fig. 7	Tab. VIII. Fig. 1
87	1	26 $\frac{1}{2}$	25 $\frac{1}{2}$
92	17	opuszczając	opuszcza się
95	22	kończa	kończą się
100	25	podzieloney	podzielney
105	5	drugi	drugą;
III	19	Lobo	Lubo
III	27	Kwadratow i kwadratowy	
136	12		na boku Fig. 4.
138	23	FGHL	FGKL.
139	1	FGHL.	FGKL.
143	12	dziewiącią	dziewięciom
144	5	AB ^o	ABq
144	10	2BC	2BC
144	11	2BC	2BC,
153	7	Cyreuli	Circuli
153	23	punktem	punkt ten
157	10	ACB.	ACE.
169	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
176	25	większym	większym
180	12	się	ią
183	9	podzielone	podziału
186	10	ad	ab
			190

Karta Wiersz

190	10
	13
	14
196	3
197	23
200	26
206	11
209	7
213	8
213	18
213	19
213	23
214	21
215	19
219	1
219	2
221	24
222	6
224	7
249	24
251	1
256	4
257	17
259	1
267	23
268	1
268	15
268	26
273	3

Karta Warsz	fol	popraw
190	10	y 5 zmazać
	13	Fig. 4. Fig. 5.
	14	Fig. 5. Fig. 6.
196	3	Egur Fig. r.
197	23	trzech trzech
200	26	podanie pociągnięcia
206	11	BC. BG.
209	7	to a to
213	8	czyli zmazać
213	18	dotknięcia dotknięcie
213	19	poprowadzić na poprowadzić
213	23	ADC. ADC.
214	27	Kwadrat kwadrat.
215	19	Przygotowanie Przygotowanie
219	1	Niech by. Niech by.
219	2	jak iak
222	24	pięć razy pięć razy
224	6	ciągle ciągle
224	7	:
240	24	takie takie
251	1	był był.
256	4	haciów haciów
257	27	dwóch nożnym dwun nożnym.
259	1	twierdzić zawierzić
267	23	Trochą kąt
268	1	części części równych
268	15	średnie średnice
268	23	podzieliły podzieliły
273	3	(267) (265)

Karta	Wierz	stoi	popraw
276	5	puktem	punktem
277	16	miara	kończą
280	1	wkreślić	wykreślić
281	15	cerklu	cerkla
284	12	Uważ	Uwaga
285	5	równey odlegley, równoodle-	gley.
286	8	wszystkie	wszystkie
287	4	założywszy	zacząwszy
287	21	wielkości	tey wielkości
288	11	rachnią	rachniąc
290	16	Przytłofowanie	Przytłofowanie
291	1	mierze	mierze
291	3	szukam	szukam
292	17	w jakim	w jakim
296	16	skończyła	skończyła
298	22	podłtwa	Podłtwa
300	8	niedostępnege	niedostępnego
300	8	dowiść	doyść
304	8	na różnych	Kąty na różnych
318	13	podzieloney	podzielney
320	14	Lo. 2-0301300	Lo. 2-03010300
320	21	Dopeln	Dopeln.
323	20	liczba	liczby
325	11	różnożoney	rozmnożoney.
342	25	180 (A x B) - 180 - (A x B)	
347	12	Pr.	Pr.
347	21	2,28330,12	2, 2833012
348	2	ktorego	ktorego
348	3	przeciwprostokątna	przeciw- prostokątna
352	1	w Trójkęcie	w Trójkęcie

356	2
358	7
358	23
360	1
360	7
361	12
365	6
365	7
367	7
-	8
-	9
-	14
-	17
368	2
-	22
369	4
-	6
-	19
370	13
374	19
376	11
378	13
379	1
382	27
387	25
388	18
391	10
391	22
392	19
393	17
395	27
400	23

Karta	Wiersz	fol	poprawo
356	2	licznych	licznych,
358	7	Pr.	- Pr :
358	23	AC	- AC ² :
360	1	Przynosiwanie	P zytłofowanie
360	7	doysć	doysć
361	12	Pr.	- Pr :
365	6	Co8	- 6o8 ==
365	7	fycz: 68.	fycz. 68 :
367	7	i AB	y AB.
-	8	i BA	y BA.
-	9	x AB	x AB.
-	14	A ₁ B	A ₁ B.
-	17	doysć	doysć
368	2	y AB	i y AB.
-	22	A	A ==
369	4	13.095856	13.095856
-	6	3400.069	3.5003469
-	19	Ayx	- Ayx.
370	13	AmAy	- AmAy.
374	19	27767714	27867514
376	11	w Trójacie	w Trójacie
378	13	tym	zatem
379	1	do fyczney	do Dofyczney
382	27	odległości	odległość
387	25	zarzędzia	narzędzia
388	18	prze	przez
391	10	fyczna	fyczney
391	22	nha	li Ba
392	19	następuje	następnie
393	17	tu	tu
395	27	punt	punkt
400	23	ita	ila

Karta Wiersz stoi popraw

403	16	postępuia	postępując
405	9	pawierzchni	Powierzchni
409	25	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
411	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
413	28	G	G
414	8	powiarzchni	powierzchni
416	29	okrągowej	okrągowi
417	7	równiey	równie y
426	18	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
431	2	tego łuku	łuku
431	20	Koła	łuku.

CZĘŚĆ 1.

CZE

O L

R

Wladom

stych, o

1. Podro

iwol

byla drog

doświadcz

ny, ośro

namierzen

goda i

scie dno

n. wrota

znali i w



CZĘŚĆ PIERWSZA

O Liniach i powierzchniach.



ROZDZIAŁ I.

Wiadomości początkowe o Liniach prostych, o Obwodzie Koła, i o Kątach.

1. Podróżny umiejący rachować kroki swoje, potrafi dochodzić iak daleka była droga ta, którą odprawił. Szereż o doświadczeniem i wyprawą częścią nauczoną, ośędzi łatwo, jeżeli frzeż na jego do zamierzonego doniesie celu. Ośadwa tak sposobił się do pewniejszego wyobrażenia sobie długości i odległości, to jest: do porównania ich z temi, które już dobrze poznali i wyznaczyli. Krok jest taką dła podróż-

A

dro-

drożnego długością, a średnia strzelby donośność, służy myśliwemu do wymiaru innej odległości.

Te proste, i inne, im podobne sposoby wyobrażenia sobie długości niewiadomych, użyteczne są w wielu bardzo okolicznościach życia; gdzie potrzeba osądzenia prędkiego; innych dokładniejszych użyć nie pozwala. A ponieważ przez częste sposobow takich używanie, uczymy się chronić tych omyłek, w któreśmy w szczególnych razach wpadać zwykli byli, nie od rzeczy więc będzie wprawiać i tak oko uczących się, tyle jednak, ile to zgodzić się może z publiczną edukacją.

Ale iakieyżekolwiek w tej mierze łatwości nabiorą uczniowie przez częste wprawiania się; chybiać wszelako będą w porównywaniu długości bardzo wielkich, lub bardzo małych. Oprócz tego, każdy w szczególności człowiek, używając sposobu wyżej wspomnianego, różniby ieden od drugiego czynił wyznaczenia iedneyże nawet długości; a zatym trudno by ludzie iedni z drugimi zrozumieć się w tej mierze mogli, gdyby pierwszego tego w wyznaczaniu długości sposobu trzymali się.

2. Z tego
wienia um
rą na sam
wyobrazić
no wizytk
które poz
przykłada
domych;
Mierą.

3. W i
zwykła b
okoliczno
ia się. W
niektóre t
długości,
i linie m
znacznie
ziemi trze
z trzech k
wieraiące
sznura, k

Poniewa
nego, tylk
fyć więc b
sobie wyol
poznać i
lokcja. W
Sężeń, Ł
wami pró

2. Z tey pobudki udano się do ustanowienia umówionej pewnej długości, którą na samo weyrażenie, dokładnie sobie wyobrazić można było. Do tey sioślowano wszystkie inne długości niewiadome, które poznać chciano, i dochodzono ich, przykładając wiadomą długość do niewiadomych; długość takowa nazwana jest *Miara*.

3. W iednymże kraju, nie iedna Miara zwykła być używana, według różnych okoliczności, które do iey użycia zdarzają się. W Polsce na przykład kupieckie niektóre towary, i pomnieysze na ziemi długości, łokciem, podzielonym na cale i linie mierzyć się zwykły. Gdy zaś znacznieyszą jaką długość wymierzać na ziemi trzeba, używamy do tego łaźnia z trzech łokci złożonego, albo prętu zawierającego $7\frac{1}{2}$ łokci, a ieszcze lepiej sznura, który 10. prętów zamyka.

Ponieważ te ostatnie miary nic nie są innego, tylko łokieć kilka razy przydany, dosyć więc będzie wielkości łokcia dokładne sobie wyobrażenie uczynić, aby dokładnie poznać i wielkość miar większych od łokcia. Wszystkie te słowa: *Sznur*, *Pręt*, *Sążeń*, *Łokieć* i t. d. byłyby tylko słowami próżnemi y bez zrozumienia, gdy-

byśmy dokładnego nie mieli wyobrażenia, jedney z tych miary, na przykład łokcia; bo wszystkie nasze wyobrażenia, które o wielkościach mamy, są tylko *względne* (relatywne) jedne do drugich.

4. Kraje różne odmiennych też miar zażywają; a co jeszcze w opaczne rozumienie wprowadzić może, miary te, lubo odmienne, jednymże słowem często się wyrażają. (a) Tak łokieć Litewski jest $\frac{1}{3}$ większy od łokcia Koronnego; a zatem i inne Litewskie miary, w które łokieć wchodzi, większe będą od miar Koronnych. Łokieć Francuzki, dwa razy prawie jest od Polskiego większy. Miła Niemiecka, zawiera prawie $1\frac{2}{3}$ mili Francuzkiej; a miła Angielska trzecią tylko jest Francuzkiej mili częścią. (Obacz w 3. Części Arytmetyki, na karcie. 276.

5.

(a) Matematycy z wielką uślınością szukali miary jednolitej, do której można by było stosować wszystkie inne. Rozumeli oni, iż ją znaleźli w długości Wieszadła prostej (*Pendulum simplex*) ustawionego w miejscu wolnym od zakłóceń, i na powietrzu pomiarkowanym; ale ta materya należy do Fizyki.

5. W p...
jęmy, na la...
gość, wielk...
W takowym...
się samymi Li...
gności Lin...
czają odległ...
od jednego i...
ly zaś w ty...
kto szcze...
rila zaczyna...
gdzie jedna...
toły się, że...

6. Przez...
rzecz sam...
prze wadzi...
drugi punkt...
pierwszego...
czony, prze...
chodzić, w...

(b) Nie trze...
śledzić, a...
i w p...
tych w z...
wtedy w...
mi, na to...
czono...
czono...

5.

17ii

(b) Nie trzeba tych wyrażać mić za D-faję, ale tylko za pociąg obłąnieniu i wyłączenia wyobrażeń, które do tych i w zaskakująco przynależą. In więcej nie zaleca się nad porządkami, na których zależały nasze wiadomości, tym więcej pojęzga, trumność w ich wyłożeniu.

nii, już się wyznacza; albo co na iedno wychodzi; wŹyŹtkie Linie proŹte, któreby kto przez dwa Punkta dane poprowadził, nie będą tylko iedną i tą Źamą Liniją. A zatym, gdy dwie Linie proŹte Źchodzą Źię, lub przecinaia, nie mogą tylko Punkt ieden mieć Źpolny. Gdy Źię mówić będzie w Źzczegulności o wymierzaniu na ziemi, powiemy tam, iaką oŹtrożność mieć potrzeba, gdy wyznaczyć i wymierzyć przychodzi Liniją łączącą dwa Punkta, których odległość ieŹ wielka.

7. Na papierze, aby złączyć dwa Punkta przez Liniją proŹtą, uŹywamy narzędzia, które Źię nazywa *LiniaŹen* (Regula) nieŹpuszczaiąc Źię na Źamą rękę y oko; i przyŹtawiaŹy ten Liniał do dwóch wyznaczonych Punktów, kreŹlemy piorem, lub ołówkiem Liniją podaną.

Oprocz wymiaru Linii proŹtych, przypada częŹto zatrudniać Źię połoŹeniem ich, iednych względem drugich.

8. Gdy dwie Linie, maia Punkt Źpolny, mogą być do Źiebie nachylone rozmaitemi ŹpoŹobami. AbyŹmy tę wielość połoŹeń ich, iedaŹych względem drugich dobrze poieli; wyŹtawmy Źobie Liniją iedną proŹtą na Źtole na przyklad wyrytą, i dru-

ga na niey nayprzod położoną, i zupełnie do niey przywstającą, a potym obracającą się około Punktu wyznaczonego, któryby tym obydwom Liniom był spólny. W takowym obracaniu się, druga Linia odmiennie coraz położenia i nachylenia mieć będzie względem pierwszej. Te rozmaite nachylenia nazywają się *Kątami* (Anguli) Punktu, około którego ta druga Linia obracała się, nazywa się *Wierzchołkiem kąta*. (Vertex Anguli) Linie, które nachyleniem swoim ten kąt czynią, nazwać można *Ramięmi* (po łacinie zowią takowe Linie *Curae*.) Pod czas obracania się tej Linii, Punkt którykolwiek w niey oznaczony, w jednakiey zawsze odległości będzie od tego Punktu, około którego stalecznie się Linia obraca; a zatym i wszystkie Punktu śladu od niey zostawionego, iednakowo będą odległe od tego Punktu nie wzróżzonego. Jeżeli obracająca się Linia zupełny obrót uczyni, że znowu do pierwszego położenia, z kąd się obracać zaczęła, powróci; ślad taki od tegoż samego Punktu zostawiony, nazywa się *Obręgiem koła*. (Circumferentia Circuli) Właść Okręgu ztąd wypływająca, jest ta: że każdy w nim znajdujący się Punkt, w równey od iednego Punktu zostaje odległości; a ten Punkt nazywa się *Srodkiem*. (Centrum) Odległość

srodka

środku od któregokolwiek Punktu Okrągu, nazywa się *Promieniem*. (Radius) Część Okrągu, nazywa się *Łukiem*. (Arcus) a Linia prosta łącząca końce dwojgu Łuku, nazywać się może *Cięciwą*. (Chorda) Gdy Cięciwa ta przechodzi przez środek Okrągu, a zatem dwa razy większa jest od promienia, zwać ją będziemy *Srednicą*; (Diameter) Dzieli ona okrąg koła, na dwie równe części, które tym tylko różnią się; że jedna z jednej, a druga z drugiej strony Srednicy jest położona. (c)

9. Po tych Definicjach, (które objaśnić należy rącznym działaniem tego, co wyrażają) poryżmy do wyłożenia początku kątów, z którego pochodzą.

Jeżeliby Linia ruchoma, odprawiła obrotom swoim, połowę, trzecią część, czwartą, piątą i t. d. tej całej drogi, którą iey obeyść trzeba było, aby do pierwszego swego położenia powróciła; Punkt też którykolwiek tej Linii, odprawił tym samym połowę, trzecią część, czwartą, piątą okrągu zupełnego, któryby

(c) Chcąc na papierze narysować Okrąg koła, którego środek y promień ma być wyznaczony; używamy do tego narzędzia nazywanego po polsku Cerkłem (Circinus)

jeżeli linia
Znajdę wy
wszy za iro
promieniem
między ram
kość tego l
okrągu, do
znac wielko
tego mięt
teoy iedna
zaczynając
drugiej leż
iżnowu d
tak ten nazy
czy dwoma
znowu tak l
we lę powi
bani i t. d.

(d) Ten wy
półtora
kątów
i t. d.
i t. d.
i t. d.
i t. d.
i t. d.
i t. d.
i t. d.

by ta linia zrobiła wkoło się obrociwszy. Zkąd wynika, że wierzchołek kąta obracający się za środek, i od niego jakiegokolwiek promieniem łuk nakreśliwszy, któryby między ramionami kąta zanymał się, wielkość tego łuku koła względem całego okręgu, do którego nareży, da nam poznać wielkość kąta, względem całego tego miarownika kąowego (Angularis) której jedna z tych dwóch linii przeszła, zaczynając się obracać wtedy, gdy na drugiej leżała, a niekończąc się obracać, znowu do niej przychodzi. I przeto łuk ten nazwany jest Miarą (d) kąta między dwoma ramionami zamkniętego, a nazym tak łuk ten, jako i kąt, iednakowo się powiększają, albo zmniejszają, to jest: idą one razem podwoynemi, potroynemi i t. d.

10.

(d) *Tę wprawdzie Miarę nie należy brać w ścisłym rozumieniu: miara bowiem każdej kółki właściwie jest, porównując ją do tego koła, którego jest to kółko. Kółko się mierzy: nie przez samą długość łuku, mierzą się przez cięciwę koła. Łuk jest kółko i kąt, sągiem i różnica, a z tym kółkiem miarę kątów właściwie mierzą być nie mogą.*

10. Ztąd się okazuje: że wielkość kąta od długości ramion jego nie zawisła. (uwaga to jest, nad którą dobrze zastanowić się potrzeba.)

11. Aby sposobem wygodnym wielkość każdego kąta wyznaczyć przez wielkość łuku między jego ramionami zamkniętego; którego promień jest dany; zgodzono się na podzielenie okrągu iakiegokolwiek na 360. części równych, z których każda nazywa się *Stopniem* (Gradus.) Przeto jeżeli łuk zamknięty między ramionami kąta, ma w sobie 20, 30, 40, i t. d. części takich, iakich okrąg cały ma 360; o tym także kącie mówią, że ma 20, 30, 40. i t. d. stopniow. (e) Na tym gruncie zafadza się cała robota i używanie narzędziow zdalnych do mierzenia kątow na ziemi,

(e) *W działaniach większey dokładności wyciągających, dzielą jeszcze każdy stopień na 60. części nazwanych Minutami, a każdą minutę na 60. minut drugich (Minuta secunda albo iednym słowem: secunda.)*

Znak stopniow, jest: o nad liczbą stopniow napisane.

Tak nap: 20°, 21°, 30°, 31°, i t. d. wymawia się: dwadzieścia, dwadzieścia iena i t. d. stopniow.

mi, i sp
papierze. k
podaną lic
tych miar

Dla uni
szerne kaz
sobą poci
pośługowa
pewne naz
tow i t. d
nia.

12. Pu
litere, np
tego par
x. y. z. g
ią jego po

Do ozn
re na dw
wie kości
wielkości
tedy na
przy nich
mianują.
kra A i
ma złączo

Dla oz
czynią dy

mi, i sposób robienia tychże kątów na papierze, któreby iakąkolwiek stopniów podaną liczbę zawierały. *O narzędziach tych mówić potym będziemy.*

Dla uniknienia długości, któraby obfzerne każdego działania wykładanie za sobą pociągało, i aby natężeniu myśli posłsgować, zgodzili się Matematycy na pewne nazwiska Punktów, Liniów, Kątów i t. d. około których mają doczynienia.

12. Punkt oznaczają przez jedne tylko literę, np: A.B.C.D. i t. d. gdy położenie tego punktu jest wiadome: a np: przez x, y, z, gdy nie wiedzą, ale dopiero szukają jego położenia.

Do oznaczenia Linii używają liter, które na dwóch ich końcach kładą, jeżeli jest wiekości ograniczoney; jeżeli zaś w wielkości swojej nie jest ograniczona, tedy na niej dwa punkta stanowią, i przy nich piszą dwie litery, któremi ją mianują. Tak nap: Linia łącząca dwa punkta A i B oznaczona byłoby temi dwiema złączonemi literami AB.

*Tł. I.
Fig. 1*

Dla oznaczenia kąta (ponieważ ten czynią dwie linie do siebie się nachylające)
kładą

kładą trzy litery jedną przy wierzchołku kąta, drugą i trzecią przy końcu ramion tego kąta; a złączwszy je razem, i w środku ich położywszy literę nad wierzchołkiem kąta napisaną, trzema temi literami kąt wyrażają. Tak nap: kąt zrobiony przez dwie linie CA, CB. oznacziliby jednym z tych dwóch wyrazem: ACB. albo BCA. Gdy wierzchołek nie należy do więcej jak do jednego kąta, do którego będzie oznaczyć kąt tą jedną literą, która jest nad wierzchołkiem jego.

Fig. 2.

13. Kiedy ramie ruchome przez obrot swój, którym początek kątów obrócił się, uchodzi tylko czwartą część całego okręgu; zrobi takim obrotem swoim dwa kąty równe z tą Linją, około której się obraca, gdy tę drugą daley pociągniemy. Te kąty nazywają się *Prostem* (Anguli recti) łuk koła, który im za miarę służy, będzie miał w sobie 90. stopni, sama zaś linia ruchoma, będzie w ten czas *Prostopadłą* (Perpendicularis) względem drugiej. (Odcz w pierwszej części Arytmetyki na kartce 87.)

Fig. 3.

Gdy to samo ramie ruchome obrotem swoim nie dochodzi czwartej części okręgu, wtedy kąty między nim i drugim ramieniem przedłużonym, uczynione, będą

da nie row
prostego
nazwane sa
(ang. eps p
zowie się
prostego.
z tych linia
do drugiey
kąt DCB. je
ty, Linia

14. S
równa się a

Niech l
ma karow
kątom prost

Jakoż.
brotem swo
daley się i
tek przyfal
takim prze
razem byłab
więc te dw
summy z d
ney, a za
prostym.

15. Gdy
na drugą st

da nie równe. Jeden mniejszy będzie od prostego, a drugi większy. Te dwa kąty nazwane są *Przyleżnemi* (Adjacentes) albo (deinceps positi.) Mniejszy od prostego zowie się *Ostry* (*acutus*) większy zaś od prostego, *Rozwartym* (*obtusus*) a jedna z tych linia nazywa się *Pochyła* (*obliqua*) do drugiej. Kąt DCA, DCB, są nierówne; kąt DCB, jest ostry, a kąt DCA, Rozwarty, Linia DC, pochyła do Linii AB.

Fig. 4.

14. *Summa dwóch kątów przyległych, równa się dwóm kątom prostym.*

Niech będzie DC, pochyła do AB, summa kątów: DCB, DCA, równa jest dwóm kątom prostym.

Jakoż, gdyby Linia DC, zrobiwszy obrotem swym około Punktu C, kąt BCD, dalej się jeszcze obracała, ażby naostatkiem przyśłała do linii CA, byłaby obrotem; takim przeszła dwa kąty proste: ale też razem byłaby przeszła i kąty BCD, i DCA; więc te dwa kąty są dwiema częściami summy z dwóch kątów prostych złożonej, a zatem równają się dwóm kątom prostym.

15. Gdyby Linia CD, była pociągnięta na drugą stronę linii AB, na przykład aż do

do E; kąty BCD, ACE, nazywałyby się, ieden względem drugiego *Przeciwległemi w wierzchołku* (ad Verticem oppositi) mają one wierzchołek C, spólny; a ramioną CA; CE, iednego z tych kątów, są przedłużeniem ramion CB, DC, drugiego.

16. *Kąty w wierzchołku przeciwległe są równe.*

Jakoż w samey rzeczy kąty: BCD, ACE, mogą być uważane, iak gdyby się zrobiły z obracania się linii ED, około Punktu nie-wzruszonego C, zaczynając ten obrot, gdy Linia ED. na linii AB. leżała, aż do położenia iey na CE. Tym sposobem linia ED. przez taki swoy obrot nachyli się do linii AB, równie z iedney iak i z drugiej strony, a zatem czyni równe kąty DCB, ECA.

Wszystkie te *Podania* (Propositiones.) któreśmy dotąd przytoczyli, powinny być objaśnione, wykonywając ie, przez działania ręczne, na których się zasadzają. (f)

ROZ-

(f) *Niech się nieobawiają Nauczyciele żądanych zarzutów, gdy przez ruch linii tłómaczyć i objaśniać będą wiele prawd Geometrycznych Uczniom swoim dopie-*

RO
O przystaw
s. o. owen

17. Definicja
ma lin
kątów pro
neum.) Niv
kąt używa
l. ówch się
Bokami Tro
kie linie zov
zwiśka do in
my. Przyst
padanie fig
rym równo

ro i okry
al. n. i
tel. ości
ich oczam
któremi
ich na r
sutekanie
nich i nie
razem i

ROZDZIAŁ II.

O przysławianiu *Troykątów*, z przy-
sławianiem do rozwiązania wielu
Zagadnień.

17. *Definicje*: Mieysce zakończone trze-
ma liniami prostemi, zowie się *Troy-
kątem prostokątnym* (*Triangulum rectili-
neum*.) My samego przez się słowa *Troy-
kąt* używać będziemy. Linie trzy, w
których się *Troykąt* zamyka, zowiemy
Bokami Troykąta (*Latera Trianguli*.) Ta-
kie linie zowią także *ścianami*. Tego na-
zwiska do innego potym znaczenia użyje-
my. *Przysławianie*. (*Convenientia*) i przy-
padanie figur jednych do drugich, na któ-
rym równość dwóch iakich Powierzchni
zakła-

ro poczynającym. Dalecy oni są ielazne,
aby w tej materji domyslać się mieli sub-
telności Arystotelewskich. Czynie pod
ich oczami działania około tych rzeczy,
którymi się zajmować mają, i zmyśli
ich na nie obracać, jest to ieden z naj-
skuteczniejszych sposobów, barczność w
nich i uwagę do rzeczy przywiązać, a
razem i natężeniu myśli popożycować.

zakładamy, używane jest często w po-
 spolitych życia ludzkiego potrzebach i
 wygodach. Na obicie i przykład poko-
 iów, bierzemy tyle płotna, lub innej ia-
 kiej materji, ile wystarcza na przykry-
 kcie ścian tego; i wielkość powierz-
 chni tego obicia, nie różni się od ścian
 powierzchni, które pokrywa tylko tym,
 że ściany są pod obiciem, a obicie na
 ścianach. Toż mówić o deskach wystar-
 czających na podłogę, albo o szybach do
 okien i t. d. Krawcy o to się starają, aby
 tak suknie lub inne odzienia wymierzali,
 żeby te przysławały iak nylepiey do tych
 ciała części, które pokrywać mają. Dwie
 księgi jednakowego dzieła, dwa obrazy
 pod jednakowemi wymiarami odmalowa-
 ne, nie różnią się co do powierzchni,
 tylko tym, że nie są iedną rzeczą, ale
 dwiema. Miary na zboże, napoje, i t. d.
 tak się zgadzają z sobą, że iedna pra-
 wie wielość ziarna pewnego, napełnia
 korzec ieden, iako i drugi; tyle w iednym
 garniec, co i w drugi mieści się napoju i
 t. d. gdy te miary stosują się do iedney u-
 stanowieniy od Zwierzchności.

18. *Twierdzenie* (Theorema). Jeżeli w
 dwóch Troykach, dwa boki w iednym,
 równe są dwóm bokom w drugim, i kąty
 między temi bokami zawarte równe, trze-
 ci

ci też bok
 ciami bok
 iowach rów
 drugim Tro

Niech bę
 których b
 też BC, bc,
 Dowieś tr
 kąty A, i a

Dowód
 my sobie
 warw (co
 czy łamey
 ry na Troy
 położysz
 też cb, przy
 wności ką
 Ponieważ
 a linia cb,
 padną na p
 ab, i AB, b
 kończone.
 przykryją si
 tym będą ro
 CA, cb, CB,
 b, i b.

19. U
 nie różni

ci też bok jednego, równy będzie trzeciemu bokowi drugiego, i kąty przy tych bokach równych będące, w jednym i w drugim Troykacie będą równe.

Niech będą dwa Troykаты: ABC , abc , *Fig. 5.* których boki: AC , ac , są równe, boki też BC , bc , równe i kąty: C , i c , równe. Dowiesć trzeba, że i boki: AB , ab , i kąty A , i a , iako też B , i b , będą równe.

Dowodzenie (Demonstratio.) Wystawmy sobie Troykat: abc , iakoby odrywany (co też odstrzygszy go, i w rzeczy samey wykonać można) i przeniesiony na Troykat: ABC , w ten sposób; aby położywszy linią ca , na linii CA ; linia też cb , przystała do linii CB , (co dla równości kątów C , i c , nastąpić powinno) Ponieważ linia ca , równa jest linii CA ; a linia cb , linii CB , Punkta a , i b , przypadną na punkta A , i B ; a zatem i linie ab , i AB , będą przez te same punkta zakończone. Wiec te dwie ostatnie linie przykryją się zupełnie jedna druga; a zatem będą równe; i zrobią z liniami ca , CA , cb , CB , kąty równe a , i A , iako też b , i B .

19. Uwaga. Dwa Troykаты cab , CAB , nie różnią się od siebie, tylko przez to,
B że

że odmienne miejsca zastępują. O takich więc dwóch Troykach; a w powszechności i o każdych dwóch Figurach, samym tylko położeniem myśla różniących się mówimy, że do siebie przyłączać mogą.

20. *Przystosowanie: Jeżeli w jednym Troykacie, dwa boki są równe, będą też równe i dwa kąty przy nich leżące.*

Fig. 6. Niech będzie Troyką ABC, którego boki AC, BC, są równe; kąty też A i B, będą równe.

Wystawmy sobie, że ten Troyką ABC, wybity jest na drugim miejscu tak, żeby bok CA, w wybitym Troykacie, to miał położenie, co bok CB, w Troykacie pierwszym, a znowu bok CB, aby w drugim, na tej stronie leżał, na której bok CA, w pierwszym; ponieważ kąt C. jest jednakowy w obydwóch tych Troykach, położywszy tedy drugi Troyką na pierwszym; bok CB, i CA, Troyką wybitego przyślanie zupełnie pierwszy CB, do boku CA, drugi CA, do boku CB, Troyką pierwszego, a zatym i Punkta B, i A, należące do Troyką wybitego, leżąc będą na punktach A. i B, należących do pierwszego Troyką. Więc drugi Troyką

kąt przemie-
przyślad do
tego Troyk
towi A, dru
żnego. A
Troykacie
drugiego T
Troyką p
A. w Troy
zatym kąt

Następn
dzenie, za
czy nący
czeń zaw
go dowod
trosć Ucz

Niech
boki CB,
dą też rów

Przygo
przedłużo
równe,
wadźmy

Dowod
są równe
są równe
ECA, go

kąt przeniesiony na pierwszy będzie mógł przyśtać do niego; a przeto kąty B i A, tego Troykąta równe będą. pierwszy kątowi A, drugi kątowi B, Troykąta podłożonego. Aże kąt A, w tym podłożonym Troykącie, jest równy także kątowi A drugiego Troykąta, więc kąty A i B, Troykąta podłożonego są równe kątowi A, w Troykącie na nim położonym, a zatem kąty A i B, są sobie równe.

Następujące tegoż twierdzenia dowodzenie, zastrawia prawie wszystkich początkujących: i wielu jest zdania, lubo często zawodnego, że w zrozumieniu tego dowodzenia, daie się poznawać pojętność Ucznia i społubność do Geometrii.

Niech będzie Troykąt CAB, którego boki CB, są równe; kąty CAB, CBA, będą też równe. Fig. 7.

Przygotowanie. Na liniach CA, CB, przedłużonych, weźmy iakiekolwiek linie równe, naprzykład: AD, BE, i poprowadźmy BD, AE.

Dowodzenie. Ponieważ linie CA, CB, są równe; a linie też AD, BE, wzięte są równe; więc w Troykątach: DCB, ECA, gdzie kąt C jest spólny; ramiona B 2 CB,

CB, i CA, CD, i CE, tego kąta równe będą; a zatem te dwa Trójkąty przyściną do siebie mogą; (18) a w szczególności linie AE, BD, i kąty przy D i E, równe będą.

W Trójkątach: ADB, BEA, boki AD, BE, są równe, dowiodło się też, że linie BD, AE, są także równe, i że równe są kąty w tych ramionach zawarte przy D, i E; więc te Trójkąty mogą do siebie przyścinąć; a w szczególności kąty: DAB, EBA, są równe, a zatem i im przyległe: CAB, CBA. będą równe.

21. Gdyby wszystkie trzy boki w Trójkącie były równe, trzy także kąty w nim równe byłyby.

22. *Definicje.* Gdy w Trójkącie dwa boki są równe, taki Trójkąt zowiemy *Równoramiennym* (Isosceles albo *Æquicrum.*) Gdy w Trójkącie boki trzy będą równe, nazwiemy go *Równobocznym* (*æquilaterum,*)

Gdy w Trójkącie wszystkie trzy boki nierówne będą, zwać go będziemy: *Różnobocznym* (*Scalenum.*)

23. *Twierdzenie 2.* Gdy dwa Trójkąty, mają bok jeden równy, i gdy dwa kąty

kąty przy tym
wre są wzajem
równym grun
u jednym T
ciemu katow
ki, równe v
dwóch tych

Niechay
tach: ALC,
i a. B i b.
równy ką
także BC, b

Dowodzenie
kat etc, prze
na nim położ
stawiawszy r
linii AB, na n
równa się kat
też a, przyś
BC; Punkt t
zem i ra lin
tym znaydow
przecięciu C
nie przytani
to linie ac
BC, tak, iak

24. Przy
kacie. kąty
są równe, t

kąty przy tym boku jednego troykątą, równą względem dwóch kątów przy boku równym drugiego Troykątą; trzeci też kąt w jednym Troykącie, równy będzie trzeciemu kątowi w drugim: i dwa inne boki, równie względem siebie będą w obydwóch tych Troykątach.

Niechay naprzykład w dwóch Troykątach: ALC , abc , boki AB , ab , i kąty A i a , B i b , będą równe; będzie i kąt C , równy kątowi c ; boki: AC , ac , i boki także BC , bc , będą równe.

Fig. 5.

Dowodzenie. Wystawmy sobie Troykat abc , przeniesiony na Troykat ABC ; i na nim położony, tak, aby Punkt a , postawiwszy na Punkcie A , linia ab , równa linii AB , na niej leżała. Ponieważ kąt a , równa się kątowi A , i kąt b , kątowi B ; linia też ac , przyślanie do linii AC ; a linia bc , do BC ; Punkt tedy c , musi się znajdować razem i na linii AC , i na linii BC , a zatem znajdować się będzie na ich spólnym przecięciu C . Więc Troykat abc , zupełnie przyślanie do Troykątą ABC , a przeto linie ac i bc , równe będą liniom AC , BC , tak, iako i kąt c , równy kątowi C .

24. *Przyładowanie.* Jeżeli w Troykacie, kąty przy *Podstawie* (ad basim) są równe, taki Troykat będzie *Równoramienny*.

ramiennym. Dowodzenie tego podobne jest wcale dowodzeniu położonemu w przytęśnianiu pierwszego Twierdzenia (20.) Jeżeli Troyką ma wszystkie trzy kąty równe, będzie Równobocznym.

25. Twierdzenie 3. Gdy w dwóch Troykątach, boki trzy iednego, równe są trzem bokom drugiego; i kąty też trzy w iednym, będą równe trzem kątom w drugim, a te dwa Troykąty mogą przyśtać do siebie.

Tab. II. Niech będą dwa Troykąty ABC, abc, *Fig. 1.* takie, aby bok AB, w pierwszym, równy był bokowi ab, w drugim, podobnie iak i boki AC, BC, równe bokom ac, bc, te dwa Troykąty mogą przyśtać do siebie.

Dowodzenie. Wystawmy sobie Troykąt abc, przeniesiony i położony pod Troykątem ABC, tak, iak go wyraża na figurze Troykąt ABD. Poprowadźmy linią CD. Ponieważ linie CB, BD, są obie dwie równe linii cb, są też i sobie równe; więc i kąty: BCD, BDC, są równe (23.) Podobnie kąty ACD, ADC, są także równe; a zatem i kąty: ACB, ADB, równe będą.

Więc dwa Troykąty: ACB, ADB, mogą przyśtać do siebie. Ale że też Troyką-

kąty: ABD
więc przytę-
abc.

26. U-
być trojak
linia AB,
może prze-
przechodzi-
zenie tey
mo jest w

27. Z-
ne dwa
od każe-
był odleg

Rozwi-
od drugie
dziwszy
od odleg
gdzie się
dzie punk

28. U-
tak łatwe
kreślenie
gadnień.
Constru-
wają tak
przygot

kąty: ABD. i abc przyśtać do siebie mogą; więc przyśtać także i Troykąty: ABC, abc.

26. *Uwaga.* Położenie linii CD, może być trojakie, bo może albo przecinać linią AB, między punktami A i B, albo może przez który z tych dwóch punktów przechodzić, albo nawet i przez przedłużenie tejże linii AB. Dowodzenie toż samo jest we wszystkich trzech razach.

27. *Zagadnienie.* (Problema.) Mając dane dwa punkta, znaleźć trzeci, któryby od każdego z tamych, w jednakowej był odległości.

Rozwiązanie (Solutio.) Od jednego i od drugiego z punktów danych, poprowadziwszy łuk koła promieniem większym od odległości tych dwóch punktów; tam gdzie się te dwa łuki przecinac będą, będzie punkt, którego szukamy.

28. *Uwaga.* Na rozwiązaniu tego, lubo tak łatwego zagadnienia, zaśladza się *Wykreślenie* Geometryczne wielu innych Zagadnień, Wykreślenie to zowią po łacinie: *Constructio*, lubo tego samego słowa używają także Matematycy na oznaczenie przygotowania poprzedzającego dowodzenie

czenie, przez kreślenie pewnych linii potrzebnych do tegoż dowodzenia. My przykładem ich, w obydwóch także razach, używać będziemy tego słow: *Wykreślenie.*

29. *Zagadnienie 2.* Daną linią prostą, podzielić na dwie części równe.

Rozwiązanie. Sposobem w poprzedzającym Zagadnieniu wyrażonym, znajdziemy po obydwóch liniach tej stronach dwa punkty, któreby od końców iey iednakowo były odległe; złączmy te dwa punkta linią prostą, ta przetnie w iednym punkcie linią daną, i w tym przecięciu będzie punkt podziału żadanego.

Fig. 3. Niech będzie linia dana AB, C Punkt równo odległy od A i B, końców linii danej; D. drugi punkt, podobnie także odległy. Punkt X, gdzie linia CD, przecina linią AB, dzielić będzie na dwie równe części linią daną.

Wykreślenie, (Constructio.) Pociągnijmy linie AC, BC, AD, BD.

Dowodzenie. Troykąt: CDA, CDB, mają trzy boki równe iedne drugim; a zatym (25.) mogą przyśtać do siebie; a w iżcze-

w szczeg
kątowi BCL
mieć będą
spólny; i k
nakięty rów
kary mogą
i BX. są ró

30. Defi
jakiejkolwi
l. nie prze
dzy tym p
ghym zrobi
(extemus)
gu. y.

31. Twier
wierzny k
wewnętrzny
żonych.

Niech be
bok AB. p
dobaria ku
większy ied
ritynych, na

Przygotow
wę w punk
my linią AE
fię AE; poci

w szczególności. kąt ACD , równy jest kątowi BCD . Wier i rorkaty ACX , BCX , mieć będą boki AC , i BC , równe, bok CX , spólny; i kąt także w tych ramionach zamknięty równy; więc (24.) te dwa Troykątę mogą do siebie przyśtać, i linie AX , i BX , są równe.

30. *Defin.* Gdy w Troykacie, albo w jakiegokolwiek inney figurze, bok jeden lub iże przedłużony; kąt, który się między tym przedłużeniem i bokiem przyległym zrobi; nazywa się *Zewnętrzny* (externus) tego Troykąta, lub inney figury.

31. *Twierdzenie 4.* W Troykacie, zewnętrzny kąt większy jest od każdego z wewnętrznych na przeciwko niego położonych.

Niech będzie Troykąta ABC , którego *Fig. 4.* bok AB , przedłużony jest według upodobania ku D ; kąt zewnętrzny CBD , większy jest niżeli jeden ze dwóch wewnętrznych, na przykład C .

Przygotowanie. Przetnijmy na połowę w punkcie E , bok BC , i poprowadźmy linią AE , aż do F , aby FE , równała się AE ; pociągnijmy jeszcze i linią BF .

Dowód.

Dowodzenie. Troykatów : AEC, FEB, kąty przeciwne w wierzchołku E, są równe, i ramiona tychże kątów równe, z wykreślenia. Więc dwa te Troykaty, mogą do siebie przyśtać (18.) a w szczególności kąt C. równy jest kątowi EBF; który kąt EBF, jest tylko częścią kąta CBD. Przeto kąt cały CBD, większy jest od kąta C, równego kątowi EBF.

32. *Wniosek.* (Corollarium.) Summa dwóch jakiegokolwiek kątów w Troykacie, mniejsza jest od dwóch kątów prostych. Ponieważ albowiem kąt CBD, większy jest od kąta C, Summa kątów CBD, ABC, większa będzie od Summy kątów C. i ABC; a że summa dwóch kątów pierwszych, waży tyle, co dwa kąty proste, bo jest summa dwóch kątów przyległych (14.) więc ta druga summa mniejsza jest od pierwszej.

Idzie zatem, że jeżeli w Troykacie, będzie kąt jeden prosty, albo też roztwarty, dwa inne, nie mogą być, tylko każdy z nich ostry.

33. *Definicje.* Jeżeli Troykat zawiera w sobie kąt prosty, zowie się *Prostokątnym* (Triangulum Rectangulum.) Jeżeli ma kąt roztwarty, nazwać go można *Roztwartokątnym*

kątnym
trzy kąty
kątnym

34. T
kątach,
wi drugi
gly rów
przyległy
obydwóm
mogą p

Niech
mańce d
a, przy
równa.
przyśtać

Dow
na Troy
stawczy
stawał d
tow a,
Punkt d
przypad
przykła
na liiii
na D;
bo C, b
a zatem
razie k

kątnym (Obtusangulum.) Jeżeli wszystkie trzy kąty ma ostre, zwać się będzie *Ostrykątym* (Acutangulum.)

34. *Twierdzenie 5.* Gdy w dwóch Troykach, bok jednego będzie równy bokowi drugiego, i kąt tym bokom przyległy równy ieden drugiemu, a kąt nie przyległy tym bokom, także równy w obydwóch Troykach; dwa te Troykątę mogą przystać do siebie.

Niech będą dwa Troykątę ABC, abc, *Fig. 5.* mające dwa boki AB, ab, równe, kąty A i a, przy tych bokach równe, i kąty C, i c, równe. Te dwa Troykątę mogą do siebie przystać.

Dowodzenie. Przenieśmy Troykąt abc, na Troykąt ABC, tak, aby bok ab, przystawszy do boku AB, bok też ac, przystawał do boku AC; (co dla równości kątów a, i A, natąpić powinno.) Gdyby Punkt c, nie przypadł na punkt C, toby przypadł albo między punktami A i C. na przykład na d, albo dalej za punktem C, na linii AC, przedłużoney, na przykład na D; w pierwszym razie, kąt AdB, albo C, byłby zewnętrzny Troykątę CBD, a zatym większy od kąta C. W drugim razie kąt C, byłby zewnętrzny Troykątę CBD,

CBD, a zatem większy od kąta D. albo c; co w obydwóch razach, jest przeciwko podaniu, bo kąty C, i c, dane, są równe. Więc linia ac, przeniesiona na AC, nie gdzie indziej kończyć się będzie, iak na punkcie C, a zatem Trojkąty BAC, bac, mogą przyitać do siebie. (18.)

35. *Twierdzenie 6.* W każdym Trojkącie, jeżeli bok jeden większy jest od drugiego; i kąt też na przeciwko boku pierwszego, większy będzie od kąta drugiemu bokowi przeciwnego.

Fig. 5. Niech będzie Trojkąt ABC, którego bok AC, większy od boku BC; będzie też i kąt ABC, większy od kąta A.

Przygotowanie. Na boku AC, większym, weźmy CD równą CB, i od D poprowadźmy DB.

Dowodzenie. Trojkąt równoramienny BCD, ma kąty CBD, CDB, równe; kąt CDB jest zewnętrzny Trojkąta BAD; więc jest większy niżeli kąt A; a zatem i kąt CBD większy będzie od kąta A; dopieroż kąt CBA większy jest od tegoż kąta A.

36. *Twierdzenie 7.* Gdy w Trojkącie, większy jest kąt jeden od drugiego; bok

bok naprz
kszy też b
giemu kąta

Dowod
pierwszem
mniejszy
ciwnego,
drugiemu
Ale przez
jest ani rów
go, więc
towi prze
ani mni
to będzie

37. U
liśmy pier
go, albo
pizacy, n
monstratio
Okazuje si
inne odm
byłoby fał
prawdziwe

38. Wni
stokątnym
tnym, kąt
trzech kąt
boki naprz
dą nanywiel

bok naprzeciwko pierwszego kąta, większy też będzie od boku przeciwnego drugiemu kątowi.

Dowodzenie. Gdyby bok przeciwny pierwszemu kątowi, był równy albo mniejszy od boku drugiemu kątowi przeciwnego, pierwszy też kąt byłby równy drugiemu, albo od niego mniejszy (35.) Ale przez podanie, ten pierwszy kąt nie jest ani równy, ani mniejszy od drugiego, więc też i bok temu pierwszemu kątowi przeciwny, nie będzie ani równy, ani mniejszy od drugiego boku; a przeto będzie większy od niego.

37. *Uwaga.* W tym twierdzeniu użyliśmy pierwszy raz dowodzenia *złożonego*, albo *przez niepodobność*. Po łacinie piszący, nazywają takie dowodzenie: *Demonstratio indirecta*, albo *per absurdum*. Okazuje się tym sposobem, że wszelkie inne odmiennie w tej mierze twierdzenie, byłoby fałszywym; a zatem to tylko jest prawdziwe, którego dowodzimy.

38. *Wnioſki.* Ponieważ w Trójkącie prostokątnym i w Trójkącie rozwartokątnym, kąt prosty, i kąt rozwarty, są z trzech kątów największymi: przeto też boki naprzeciwko takich kątów leżące, będą największe.

A ztąd

A ztąd między wszystkimi liniami poprowadzonymi od tegoż samego punktu, od iedney linii, najmnieysza iest linia prostopadła. Inne linie pochyłe, tym większe będą, im dalsze od prostopadłej. Dwie także linie pochyłe, równey wielkości, od Punktu tegoż samego poprowadzić można; a nie więcej, i te od prostopadłej równie będą odległe.

Ztąd też wypływa, że linia prosta, nie może przecinać okrągu koła w więcej, iak we dwóch punktach, a to w tych, których odległość od środka koła, równa się promieniowi tegoż koła; bo inaczey więcej, niż dwie linie równe, możnaby poprowadzić od iakiego punktu do trzeciej linii.

39. *Defin:* Linia prostopadła, spuszczo-
na od iakiego punktu na inną linią, na-
zywa się *odległością* tego punktu od linii,
na którą spada; a to dla tego, że ta linia
iest naykrótszą między wszystkimi inne-
mi, któreby od tegoż punktu można po-
prowadzić do tey samey linii.

40. *Twierdzenie 8.* W Trójkącie sum-
ma dwóch boków, większa iest od boku
trzeciego.

Niech

Niech
dwóch bok
boku AC.

H'ykreś
AB, wezm
ich końce

Don
ramienny
więc w
iest od
będzie
sumie b
bokow w

41. U
może po
re już ma
obrazemu
linia pro
mnieysza
linii do ty
od punktu
ie na linii

42. T
prostey v
żay Punk
wno odle
pierwsze

Niech będzie Trojkąt ABC; Summa dwóch boków AB, BC, większa jest od boku AC. Fig. 7.

Wykreślenie. Pociągnawszy daley bok AB, weźmy BD, równą BC, i złączmy ich końce linią CD.

Dowódzenie. w Trojkacie równoramiennym BCD, kąty C i D, są równe; więc w Trojkacie ACD, kąt ACD, większy jest od kąta D; a zatem i bok AD, większy będzie od boku AC; a że AD równa się summie boków AB, BC, więc i ta summa boków większa jest od boku AC.

41. *Uwaga.* To twierdzenie służyć nam może po części za objaśnienie w tym, które już mamy naturalnym linią prostą wyobrażeniu. Widziemy tu oczywiście, że linia prosta, która łączy dwa Punkta, mniejsza jest, niżeli summa dwóch innych linii do tychże Punktów poprowadzonych od punktu takiego, który się nieznajduje na linii łączącej te dwa punkta.

42. *Twierdż: 9.* Jeżeli od środka Linii prostej wyprowadziemy prostopadłą; każdy Punkt w tej prostopadłej, będzie równo odległy od obydwóch końców linii pierwszej; każdy zaś inny Punkt za tą

pro-

prostopadła wzięty, nie jednakową od tychże końców odległość mieć będzie.

Fig. 8. Niech będzie prostopadła CD, do prostopadłej AB.

Nayprzód: Odległości DA, DB, Punktu któregokolwiek D, wziętego na linii CD, od Punktów A i B. są równe.

Dowodzenie. W Trojkątach ACD, BCD, kąty proste przy C, są równe, i ramiona przy tych kątach równe, więc dwa te Trojkąty mogą przyrastać do siebie; a zatem linie AD, i BD są równe.

Potem: Niech będzie Punkt E, za prostopadłą DC, linie EA, EB, nierówne będą.

Niech linia AE, przechodzi przez Punkt D, należący do prostopadłej CD; od Punktu tego poprowadźmy linią DB.

Dowodzenie. Linie AD, BD, są równe, iako się już dowiodło; a że linia AE, równa się summie Linii AD, DE, więc linia AE, większa jest od linii AD, a zatem i od linii BD, która tamtey jest równa.

Zwy-

Zwykło.
dzienie tak
z powodu
jest miły
kół od
końców wy

43. Zeg
na linii pro
pały.

Forma
dwa inne P
regę odleg
punktów.
onakowym
róż jest od
od punktu
przecinałce
przecięciu
nią prosta
rey szukaliś

(g) Poniew
położenie
tę samą u
owa inn
onakowa
złoty or
to w jo
dane, t

Zwykło się krócej jeszcze to potwierdzenie tak wyrażać: *Linia prostopadła, z pośrednią innej linii wyprowadzona, jest miejscem (Locus) wszystkich punktów w odległościach jednakowo od obydwóch końców tejże linii.* (g)

43. *Zagadnienie 3.* Od punktu danego na linii prostej wyprowadzić linię prostopadłą.

Rozwiązanie. Weźmy na danej linii dwa inne Punkta, jednakowo od punktu danego odległe; od każdego z tych dwóch punktów, jako od środka (a centro) jednakowym promieniem, większym jednak, niż jest odległość tych dwóch punktów od punktu danego, narysujemy dwa łuki przecinające się. Punkt dany, i drugi w przecięciu znalezionyłączmy z sobą linią prostą, ta będzie prostopadłą, której szukaliśmy.

C

44.

(g) *Ponieważ linia prosta, przez dane położenie dwóch punktów, jest tym samym wyznaczona; jeżeli tedy przez dwa inne Punkta, z których każdy jednakową ma od obydwóch punktów danych odległość, poprowadzimy linię, ta w środku linii łączącej dwa punkta dane, będzie prostopadłą.*

44. *Zagadnienie 4.* Od punktu danego za linią prostą, spuścić na nią linią prostopadłą.

Rozwiązanie: Znajdźmy dwa punkta na linii danej, jednakowo odległe od punktu danego; kreśląc od niego iako od środka, jednakowym promieniem, dwa łuki przecinające we dwóch punktach linię daną; szukamy innego jeszcze punktu równie od dwóch przecięcia punktów odległego. Linia łącząca ten punkt znaleziony, i drugi dany; jest ta sama prostopadła, której szukaliśmy.

45. *Zagadnienie 5.* 1. Na danej linii wystawić Trojkąt równoboczny.

2. Na danej linii wystawić Trójkąt równoramienny, którego jeden bok jest wiadomy.

3. Na danej linii wystawić Trojkąt, którego dwa inne nierówne boki są wiadome.

Rozwiązanie: 1. Z dwóch końców linii danej, promieniem równym - teyże linii, pociągnąć trzeba po iedney stronie dwa łuki, i punkt ich przecięcia złączyć z końcami linii danej.

2. Z dwóch promieniami równymi, kreśląc od ramienia Trojkąta, pociągnąć dwa łuki przecięcia poprowadzić do końców linii danej.

3. Z dwóch promieniami, kreśląc od ramienia Trojkąta, pociągnąć dwa łuki przecięcia poprowadzić do końców linii danej.

Przebieg powinien być także danej.

46. *Definicja* Trojkąt, ile wynosi kąt (Basis) iey stojący na kąta (Vertex).

47. *Przykład* kąt dany.

Rozwiązanie Trojkąta za tę przeniesienie.

2. Z dwóch końców linii danej, promieniem równym linii, która ma służyć za ramię *Trojkąta równoramiennego*, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia poprowadzić dwie linie do końców linii danej.

3. Z dwóch końców linii danej, promieniami odmiennymi, równymi w długości liniom mającym służyć za boki do *Trojkąta*, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia, poprowadzić dwie linie do końców linii danej.

Prześroga. Summa dwóch linii danych, powinna być większa od trzeciej linii także danej. (40.)

46. *Definięa.* Gdy uważamy *Trojkąt*, ile wystawiony jest na jakiej prostej linii; taka linia nazywa się *Podstawą* (Basis) *Trójkąta*, a kąt naprzeciwko niej stojący nazywamy *Wierzchołkiem Trojkąta* (Vertex Trianguli.)

47. *Przyśtośowanie.* Przerysować *Trójkąt* dany.

Rozwiązanie: Weźmy jeden z boków *Trojkąta* za *Podstawę* tego. *Podstawę* tę przenieśmy na insze miejsce; i od
C 2 koń-

końców iey promieniami, dwom innym bokom równemi, nakreśli my dwa łuki, a od punktu ich przecięcia, poprowadźmy dwie linie do końców podstawy; iuż tym samym przerysowany będzie Troykat dany, na inny iemu we wszystkim równy.

48. *Zagadnienie 6.* Maiąc dany kąt iaki, zrobić mu drugi równy, któryby miał za jedno ramie linią daną, a za wierzchołek punkt na tey linii także dany.

Rozwiązanie. Zaczynaiąc od wierzchołka kąta danego, wziąć trzeba na iego ramionach dwie iakiękolwiek linie równe, i końce ich złączyć trzecią linią. Zrobi się tym sposobem Troykat. Od punktu danego ra linii także danej, przenosi się długość, wziętą na jednym ramieniu kąta danego, i na niey iak na podstawie, przerysue się Troykat, pierwszemu ze wszystkim równy (47.)

49. *Przytłosowanie.* 1. Zrobić Troykat, którego wiadome są dwa ramiona, i kąt między niemi.

2. Zrobić Troykat, którego wiadoma podstawa, i dwa przy niey kąty.

50. *Zagadnienie 7.* Maiąc dany kąt iaki, zrobić mu drugi równy, któryby miał za jedno ramie linią daną, a za wierzchołek punkt na tey linii także dany.

Uwaga. Rozwiązanie. Zaczynaiąc od wierzchołka kąta danego, wziąć trzeba na iego ramionach dwie iakiękolwiek linie równe, i końce ich złączyć trzecią linią. Zrobi się tym sposobem Troykat. Od punktu danego ra linii także danej, przenosi się długość, wziętą na jednym ramieniu kąta danego, i na niey iak na podstawie, przerysue się Troykat, pierwszemu ze wszystkim równy (47.)

Z końca bokowi danego, przerysue się przeciwko kątowi, któryby przy punkcie danym, drugiego ramienia

Niech będzie dany kąt, linia C, i kąt przy punkcie A, i linia równa linii C, przerysue się przeciwko kątowi, któryby przy punkcie danym, drugiego ramienia

50. *Zagadnienie 7.* Zrobić *Troykat*, którego dany jest kąt jeden, i dwa boki. Jeden przyległy kątowi danemu, drugi naprzeciwko niego leżący.

Uwaga. Kąt dany może być *prosty*, *ostrogiasty*, albo *ostry*. W pierwszych dwóch razach, bok przeciwny kątowi danemu, powinien być większy od boku przy kącie będącego. (38) W trzecim razie, bok przeciwny kątowi, może być większy lub mniejszy od drugiego. We wszystkich tych razach, zrobimy kąt równy danemu, i dajmy mu za ramię, linią równą danej, a mającey mu służyć za toż ramię.

Z końca tej linii promieniem równym bokowi danemu, który ma leżeć naprzeciwko kąta danego, pociągniemy łuk, któryby przecinał drugie tegoż kąta ramię. Punkt przecięcia oznaczy koniec drugiego ramienia kąta.

Niech będzie C wierzchołek kąta danego, linia CA równa linii danej za ramię tego kąta; i niech łuk kreślony od punktu A, iako od środka, promieniem równym linii drugiej danej (która ma służyć za bok przeciwny kątowi C;) przecina drugie ramie w punktach B. i b.

I.

Fig. 9.
i
Tab. III
Fig. 1,
2, 3.

1. Gdy kąt C jest *Prosty*; dwa *Troykąt*y: ACB , ACb mogą przystać do siebie; bo linie pochyłe równe AB , Ab , iednakowo są od prostopadłej AC odległe, a zatym CB i Cb są równe.

W innych razach spuścmy linią prostopadłą AD .

2. Gdy kąt C jest *Roztwart*y, albo *ostry*, ale linia AB , większa od AC ; w tym razie linie pochyłe i równe AB , Ab dalsze są od prostopadłej AD , niżeli linia pochyła AC ; a zatym z dwóch *Troykąt*ow ACB , ACb , ieden tylko *Tróykąt* ACB wypełnia trzy założone *Warunki* (*Conditions*.)

3. Gdy kąt C jest *ostry*, ale linia AB mniejsza od AC ; dwie linie pochyłe i równe: AB , Ab , będą bliższe prostopadłej AD , niżeli linia AC ; a zatym *Tróykąt*y ACB , ACb , lubo sobie nierówne, obadwa iednak wypełnią trzy założone warunki.

*Powtórzenie przypadków, w których dwa Troykąt*y mogą przystać do siebie, albo w których *Troykąt* wyznaczony jest przez wiadomość dostateczną boków i kątów jego.

1. Dwa

1. Dwa b
2. Bok ied
3. Trzy k
4. Dwa b
niemi zawar
5. Dwa b
czy niemi z
6. Dwa
między nier
nemu kątow
7. Dwa
między nier
to wi catemu
nadek jest v
bem *Troyk*ą
rankom.
51. Uwa
reśny tu w
innych iedn
kąt Te ie
ły przypad
zwykły, i
nie podciąg
Cztery o
ściąnione o
ro. Twierd
lepiej ie o

1. Dwa boki i kąt między niemi.
2. Bok jeden i dwa przy nim kąty.
3. Trzy kąty.
4. Dwa boki i kąt Prosty nie między niemi zawarty.
5. Dwa boki i kąt rozstwarty nie między niemi zawarty.
6. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niemi, i gdy bok przeciwny danemu kątowi jest największy.
7. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niemi, i gdy bok przeciwny kątowi danemu jest najmniejszy. (Ten przypadek jest wątpliwy) bo dwojakim sposobem Trykąt czyni zadość trzem warunkom.

51. *Uwaga 1.* Nietylko z tych, któreśmy tu wymienili wiadomości, ale i z innych jeszcze wyznaczyć można Trykąt. Te jednak, które się tu wspomniały przypadki, najczęściej zdarzać się zwykły, i wszystkie inne mogą się pod nie podciągnąć.

Cztery ostatnie przypadki mogą być ściągzione do jednego. (Obacz w Rozdz. 10. Twierdz. 5.) Ale przy początkach lepiej je osobno podawać.

52. *Uwaga 2.* Same tylko *Trojkąty* są takimi figurami, gdzie wiadomość trzech boków już jest dostateczna do wyznaczenia *Trojkąta*. Okazać to w prostym przykładzie można na *Czworoboku*, albo *Czworokącie* (*Quadrilaterum*), którego wszystkie boki są równe. Chociaż albowiem wiedzieć będziemy boki wszystkie tego *Czworoboka*, nie potrafimy jednak oznaczyć jaki *Czworokąt* ztąd wyniknie, bo tym bokom różne dać możemy uachylenie, a zaty i *Czworokątowi* odmienną dać możemy figurę. Tak nap: jeżeli damy mu kąty wszystkie proste, zrobi się *Kwadrat*, jeżeli damy dwa kąty ostre, a dwa rozstwarte, zrobi się *Czworokąt* pochyły tym bardziej, im ostrzejsze iedne kąty, a drugie rozstwartsze mieć będzie.

53. *Twierdż:* 10. Linia prosta przecinająca kąt na dwie części równe, każdy w sobie punkt mieć będzie iednakowo odległy od obydwóch ramion tegoż kąta; a wszelki inny nie na tej linii Punkt, nie tak odległy będzie od iednego ramienia tego kąta, iak od drugiego.

Fig. 4. Niech będzie kąt: *ACB*, który na dwie części przecina linia *CD*; jeżeli Punkt jaki na niej, uaprzykład *D*, weźmiemy, linie prostopadle *DE*, *DF*, do ramion tego kąta spuszczone, będą równe.

Do-

Twierdż:
CDE, *CD*,
i kąt przy
ciebie (18.)

Niech z
linii *CD*; p
równe.

Niech a
tka w pu
wie częs
D, spuszc
ny *GF*.

W *Tro*
DG, więk
ma linii *F*
więc linia
Aże znowa
ni *GH*. (3
EG, więk

54. *U*
dzie a kąt
wa się *Am*
nich odleg
linii dany

55. *Z*
dwie częs

Dowodz: Dwa Trykątę prostokątne CDE, CDF, które bok CD i'pólny mają, i kąty przy C równe, mogą przystać do siebie (18.) więc linie DE, DF, są równe.

Niech znowu będzie Punkt G, nie w linii CD; prostopadłe GE, GH, będą nierówne.

Niech albowiem prostopadła GE, spotyka w punkcie D, linię CD, która na dwie części dzieli kąt ACB. Od Punktu D, spuścimy prostopadłą DF, i poprowadzimy GF.

W Trykacie DFG, summa linii FD, DG, większa jest od boku FG; ale ta summa linii FD, i DG, równa się linii FG, więc linia EG, większa jest od linii FG. Aże znowu linia GF, większa jest od linii GH. (38.) więc tym bardziej Linia EG, większa będzie od linii GH.

54. *Utwór.* Linia prosta, która przedziela kąt na dwie równe części, nazywa się *Miejscem* wszystkich Punktów, których odległość jednakowa jest od dwóch linii danych.

55. *Zagadn.* 8. Dany mając kąt, na dwie części go podzielić.

Rozw-

Rozwiązanie. Od wierzchołka tego kąta, wzięwszy na ramionach jego dwie linie równe, z końców ich kreślę dwa łuki jednakowym promieniem. Przez ich przecięcie, i przez wierzchołek kąta, prowadzę linię, ta dzielić będzie kąt na dwie równe części.

56. *Wniosek.* Będzie też można każdą z tych połowę podzielić daley na dwie równe części, te znowu na dwie i t. d. Przeto każdy kąt może być (przynajmniej myślą) podzielony, na 2, 4, 8, 16, i t. d. części równych.

ROZDZIAŁ III.

O Liniałach równo-odległych i o równoległo-bokach.

57. *Twierdzenie 1.* Niech będzie linia prosta, od której dwóch punktów wychodzą dwie linie prostopadłe. Te prostopadłe nigdzie się nie zniyda, choćbyśmy je naybardziej przedłużali.

Dowódz: Gdyby te prostopadłe, gdzie się zeszły, zrobiłyby z trzecią linią, od której są wyprowadzone, Troyką mający dwa kąty proste; a to jest niepodobna.

58.

58. *Dop.*
(Planam) p
100q nie m
gle (Parab

W ogul
linie dwie
ieonakowa
sie do tey
gie.

59. Nie
przeciete
miały kąt
linie nie
Cdyby alb
kacie z n
nym, był
iednemu
nie może.

60. W
wra się
kątowni O
ze linie
drógiey

61. D
można
kąt: DB
kąt: DE
172m (

58. *Defn:* Dwie linie na *Plaszczyźnie* (Planum) poprowadzone, gdy się zeyść z sobą nie mogą, nazwane są *Równoodległe* (Parallele.)

W ogulności zaś mówiąc: iakiekolwiek linie dwie proste od trzeciej przecięte iednakowo z iedney strony nachylające się do tej trzeciej linii, są równoodległe.

59. Niechby na przykład linie CF, DG, przecięte w punktach A, i B, od linii HE, miały kąty, CAE, DBE, równe; te dwie linie nie mogą się nigdzie zeyść z sobą. Gdyby albowiem gdzie się zeżyły, w Troykącie z nich i z trzeciej linii AB złożonym, byłby kąt zewnętrzny DBE, równy iednemu z wewnętrznych CAE; co być nie może. (31.)

60. *Wniosek:* Ponieważ kąt HBG, równa się kątowi DBE, (16.) a kąt HAF, kątowi CAE można podobnie dowieść, że linie CF, DG, nie zeydą się ani z drugiej strony linii HE.

61. *Defn:* Kąty DBE, CAE, nazwać można *Iednostronne*, podobnie, iako i kąty: DBH, CAH: EBG, EAF; GEF, FAH, kąty: DBH, CHE, nazywają się *Wewnętrzne* (Interni) takie też są i kąty: CAE, GBH

GBH. Kąty: FAE, DBH, nazwać można kątami na przemian, to jest na przemian leżącymi (po łacinie zowią się *Alterni*) toż nazwisko dają się i kątom CAE, CBH.

Te Definicje znać dobrze Uczniowie powinni.

62. Kąty przyległe: DBE, DBH, czyli razem dwa kąty proste; (14.) ale że kąt DBE równa się kątowi CAE, dla równej pochyłości obydwóch linii DB, i CA, do linii HE, więc i kąty wewnętrzne: DBH, CAE, razem wzięte równe będą dwom kątom prostym.

63. Kąty w wierzchołku przeciwne DBE, HBG, są równe (16.) więc i kąty na przemian CAE, HBG równe będą.

64. Pierwsze Twierdzenie można i tak wyrazić: że jeżeli dwie linie proste przecięte przez linią trzecią, czynić będą z nią kąty jednostronne równe, albo kąty na przemian równe, albo że dwa kąty wewnętrzne równać się będą summie dwóch kątów prostych; takie dwie linie będą równo odległe.

65. *Zagadn.* 1. Daną mając jedną linią, poprowadzić drugą równo odległą, przez punkt dany.

Niech

Niech będzie także dany jakiś linią BC.

Rozwińmy iakąż do BC. Prz równy kąta równo

Dowodzą równe odległe.

66. Twierdzenie CAE, i bardzo wszelako i gdziekolwiek wychodzi trznych II kłsa jest dy dwie strony lini szą od d

Na dowiedzieli od cie Geom wie go dzenie w

Niech będzie linia dana BC, i punkt A *Fig. 6.* także dany; przez ten Punkt poprowadzić linią równoodległą, od linii danej BC.

Rozwiązanie. Przez Punkt A ciągniemy jakąkolwiek linią, na przykład AD, do BC. Przy Punkcie A, zrobmy kąt DAE, równy kątowi ADC. Linia AF, będzie tą równoodległą, której szukaliśmy.

Dowód: Kąty ra przemian DAE. ADC, są równe, więc linie BC, AE, są równoodległe.

66. *Twierdzenie 2.* Jeżeli kąty jednostronne CAE, IBE, nie są równe, choćby też *Fig. 1.* i bardzo nieznaczna była ich różnica, wszelako jednak linie AC, BI, zniydą się gdziekolwiek z sobą; albo (co na jedno wychodzi) jeżeli summa kątów wewnętrznych IBH, CAE, mniejsza, albo większa jest od dwóch kątów prostych, tedy dwie linie CF, IL, zniydą się z tej strony linii HF, gdzie ta summa jest mniejsza od dwóch kątów prostych.

Na dowodzenie tego Twierdzenia wyfilali od dawnych czasów dowcipy swoje Geometrowie. i pospolicie fałszywie go dowodzili; bo będąc to Twierdzenie w sobie tak iadne, można było i bez

bez dowodzenia. na nie przyjąć. Można jednak dowieść go bez popadnięcia omyłce; ale dowody te tak długie, że ciąg i związek ich, wielkiego natężenia, uwagi, i rozumu wyciągający, znudziłby uczniów tym bardziej, im mniej przeświadczeni byłiby o pożytku i potrzebie tego dowodzenia. Rozumiem, idąc w tym za przykładem Euklidesa, że lepiej jest mieć to Twierdzenie za oczywiste, zwłaszcza dowiodłszy już dwóch innych. Podań *odwrotnych*, (*Propositio inversa*) pierwszego: że, gdy linie schodzą się z sobą, kąty iednostronne są nie równe; drugiego: że, gdy kąty iednostronne równe są, linie z sobą się zeyść nigdzie nie mogą.

67. *Wniosek*. Jeżeli dwie linie są równo-odległe, a trzecia je przecina, kąty iednostronne będą równe; kąty na przemian także równe; i kątów dwóch wewnętrznych summa równać się będzie summie dwóch kątów prostych. Jeden z tych trzech wniosków przypuściwszy, przypuścić trzeba i dwa drugie, tak, jak w pierwszym Twierdzeniu. Jakoż, gdyby którakolwiek z tych trzech równości kątów, nie była prawdziwa, inżby tym samym linie zeyść się gdzie z sobą mogły, to jest nie byłyby równo-odległe.

De-

Defin. C
przeciwko f
nazywać
(Parallelogra
wierzchołki
nazwiemy A

68. *Tłum.*
głęboko, b
wne są rów

Niech k
mieć on b
boki AD. i
ciwne A i

Przygo
kątną AC.

Dowod
mogą prz
bok AC ip
CAB, równ
ACB także
AB. DC są
BC; kąty ta
i C jako fl
dem siebie
tacz, także

69. *Wnio*
wno-odległ

Defin: Czworokąt, którego boki naprzeciwko siebie leżące są równoodległe, nazywać będziemy *Równoległobokiem*. (Parallelogrammum.) Liniją, która łączy wierzchołki dwóch kątów przeciwnych, nazwiemy *Przekątną* (Dianogalis.)

68. *Twierdż:* 3. W każdym Równoległoboku, boki przeciwne, i kąty przeciwne są równe.

Niech będzie Równoległobok ABCD; mieć on będzie boki AD. i DC równe; boki AD. i BC także równe, i kąty przeciwne A i C, iako też B i D, równe.

Przygotowanie. Poprowadźmy przekątną AC.

Dowód: Dwa Troykąt y: ACB. CAD, mogą przysłać do siebie; mają albowiem bok AC śpolny, kąty na przemian ACD, CAB, równe, i kąty na przemian CAD, ACB także równe; a zatem (23.) i li i e AB, DC są równe, iako też i linie AD, BC; kąty także B i D równe. i kąty A i C iako składające sumę kątów względem siebie równych w obydwóch Troykątach, także równe.

69. *Wniosek* 1. Przekątna dzieli Równoległobok na dwa Troykąty równe,
to

to jest takie, które przystać do siebie mogą.

70. *Wniosek 2.* Jeżeli dwie linie są równoodległe, spuściwszy od dwóch punktów jednej, dwie prostopadłe do drugiej, te prostopadłe równe będą.

71. *Wniosek 3.* Jeżeli Równoległobok ma jeden kąt prosty, wszystkie, też inne kąty jego proste będą; a jeżeli dwa jego boki przyległe, są równe, wszystkie także boki równe będą.

72. *Defin:* Równoległobok, którego kąty są proste, nazywa się *Prostokątem* (Rectangulum.)

Prostokąt, którego wszystkie boki są równe, zowie się *Kwadratem*. Równoległobok, który ma kąty nierówne, zachowuje nazwiśko Równoległoboku; lubo czasem z przydatkiem się wyraża, że jest Równoległobokiem *Ukośnym* (Obliquangulum.) Równoległobok ukośny, którego boki wszystkie są równe, nazwany być może *Kwadratem ukośnym* (Rhombus.)

Fig. 2. 73. *Twierdż:* 4. Jeżeli w Czworokącie boki przeciwne są równe, taki Czworokąt będzie Równoległobokiem.

Niech

Niech będzie Czworokąt: $ABCD$, którego boki przeciwne AB , CD są równe, i boki przeciwne AD i BC także równe, ten Czworokąt będzie równoległobokiem.

Przygotowanie. Poprowadźmy Przekątną AC .

Dowód: W Trójkątach: ACD , CAB , boki trzy w jednym równe są trzem bokom w drugim (64) więc przyległe do siebie mogą (25), w izogubiasz, złożyć na przemiennie CAB , ACD , więc linie AP , CD są równoległe: podobnie i linie BC , AD są także równoległe.

Twierdzenie 5. Jeżeli w Czworokącie dwa boki przeciwne są równe, i równoległe, taki Czworokąt jest równoległobokiem.

Niech będzie Czworokąt $ABCD$, którego boki przeciwne AB , CD są równe, i równoległe, ten Czworokąt jest równoległobokiem.

Przygotowanie. Poprowadźmy Przekątną AC .

D

Donec

Dowódz: Dwa Troykáty: ACD, CAB, mają bok AC spólny, boki AB i CD równe, i kąty na przemian: ACD, CAB, zawarte między temi bokami, równe; więc przysłać do siebie mogą; (18.) a w szczególności, kąty: CAD, ACB będą równe, że zaś są na przemian, więc linie AD i CB są równoodległe.

75. *Uwaga.* Czworokąt może mieć dwa boki równoodległe, a dwa inne równe, a nie być przeto Równoległobokiem, chyba w ten czas, gdy boki przyległe bokom równoodległym, są prostopadłe. Widać to można na Figurze 3, gdzie lubo Czworokąt ABCD, ma boki dwa przeciwne: AB i CD równoodległe, boki AD i BC równe, nie jest jednak Równoległobokiem.

76. *Zagadn:* 2. Mając daną linią prostą, postawić na niej Kwadrat.

Rozwiązanie. Z końca jednego linii danej, wyprowadźmy prostopadłą icj równą. Z drugiego końca tej danej linii i prostopadłej, jako do środka promieniem równym danej linii, nakreślmy dwa łuki okrągu, i Punkt ich przecięcia złączmy z końcem linii danej i prostopadłej.

Dewo-

Towodz:
będzie miał
jeden prosty

77. *Zaga*
którego bok

Sposób w
wyżey, (76)
dla powinien
być równą
łukow kres
nien być ro
stopadley.

78. *Zaga*
globok, kto

Sposób w
się od poprz
stopadley,
tym nachyl
dany.

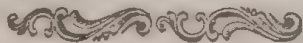
Dowodz: Czworokąt tak zrobiony, będzie miał wszystkie boki równe, i kąt ieden prosty, więc będzie Kwadratem.

77. *Zagadn:* 3. Wykreślić prostokąt, którego boki są dane.

Sposób wykreślenia jest ten sam, co wyżej. (76.) z tą różnicą, że prostopadła powinna mieć długość daną, a nie być równą podstawie; promienie także łukow kreslić się mających, ieden powinien być równy podstawie, a drugi prostopadły.

78. *Zagadn:* 4. Wykreślić Równoległobok, którego kąt iest wiadomy, i boki.

Sposób wykreślenia tym tylko różni się od poprzedzającego, że zamiast prostopadły, poprowadzić potrzeba linią z tym nachyleniem, któreby czyniło kąt dany.



ROZDZIAŁ IV.

O kątach w Figurach Prostokreślnych,
a w szczególności w Troykątach.

Widzieliśmy, (31.) że kąt zewnętrzny Troykąta, większy jest od jednego z dwóch kątów wewnętrznych temu przeciwnych; dowiódzemy teraz, że ten kąt zewnętrzny równa się obrotom kątom wewnętrznym na przeciw sobie leżącym.

Fig. 4. 79. *Twierdż:* 1. Niech będzie Troykąt: ABC, a kąt jego zewnętrzny: CBD; ten kąt równy jest summie dwóch kątów wewnętrznych: A i C.

Przygotowanie. Poprowadźmy BE, równoodległą od AC.

Dowódz: Kąty na przemian C i CBE są równe; równe także i kąty jednostronne: A i EBD; więc summa kątów: C i A, równa jest summie kątów: CBE i EBD, to jest kątowi zewnętrznemu CBD.

80. *Twierdż:* 2. W każdym Troykącie, summa trzech kątów równa jest dwom kątom prostym.

Niech

Niech będzie Trójkąt: ACB: suma trzech jego kątów, równa się sumie dwóch kątów prostych.

Przebieganie. Podążniemy dalej AB, najrzykad aż do D.

Dowód: Już się dowiodło, że kąt zawarty między CBA, równa się dwóm kątom utworzonym A i C: więc suma kątów CBA i CBA, równa się będzie sumie kątów: A, C, i CBA: ale suma dwóch pierwszych kątów, jako przyległych; wyrównywa dwóm kątom prostym; więc i druga trzech kątów summa, równa dwóm kątom prostym, jest równa. (II)

81.

(II) To Twierdzenie jest bardzo wielkiej użyteczności, gdyż przez nie, jak wyżej wspomnieliśmy, dowiedzieliśmy się, że suma kątów w trójkącie jest równa dwóm kątom prostym. To twierdzenie jest bardzo użyteczne, gdyż przez nie dowiedzieliśmy się, że suma kątów w trójkącie jest równa dwóm kątom prostym. To twierdzenie jest bardzo użyteczne, gdyż przez nie dowiedzieliśmy się, że suma kątów w trójkącie jest równa dwóm kątom prostym.

81. *Wniosek 1.* W Troykacie równobocznym, każdy w szczególności kąt, jest trzecią częścią dwóch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ kąta jednego prostego, to jest, każdy waży 60. stopni.

82. *Wniosek 2.* W Troykacie, znając dwa kąty, już tym samym znany i kąt trzeci.

Przykład. Niech będzie Troykat, którego kąt ieden ma stopni 50. a drugi 72. summa tych dwóch kątów będzie 122.

Różnica, zaś, 122. od dwóch kątów prostych, albo od 180. jest 58. i ta jest wartość trzeciego kąta.

83. *Wniosek 3.* W Troykacie równoramiennym, znając kąt ieden, poznamy zaraz i dwa drugie.

Przy-

takowy okazywać, i iak się iedna prawda z drugiej odkrywa. Ztąd naywiększy pożytek z Matematyki odnieść mogą, i nabiorą prawdziwego ducha Matematycznego, co nierównie pożyteczniejszy będzie, iak mieć nawet wiadomość samey Matematyki.

Przykład. Niechby kąt jeden przy wierzchołku ważył 40° , w Trykacie równoramiennym. Już tym samym dwa inne ważą 140° , aże są równe, każdy z nich ważyć będzie połowę, to jest 70° .

Niechby znowu, kąt jeden przy Podstawie ważył 64° , i drugi przy Podstawie ważyłby 64° . Summa tych dwóch kątów byłaby 128° , a różnica między 180° , i 128° , to jest 52° , pokazałaby ważność kąta trzeciego.

84. *Defin.* Figura maieca więcej niż cztery boki, albo kąty, naz. wa się *Wielokąt*. (Polygonum.)

85. *Twierdzenie 2.* Ważność summy kątów wszystkich w Figurze Prostokątnej (Figura Rectilinea.) zawisła od liczby boków trzycz Figury. Liczbę tę boków podwoiwszy, i odejawszy od podwojonej liczby 4; reszta okaże w kątach prostych ważność kątów wszystkich Figury prostokątnej. Nim się przystąpi

do

do ogólnego dowodzenia, trzeba zacząć od przypadków szczególnych w sposób podobny następującemu.

Niechby na przykład Figura Prostokątna miała tylko cztery boki, to jest niechby tylko była Czworokątna. Poprowadzimy w niej Przekątną, ta podzieli Czworokąt na dwa Trójkąty, w których suma kątów razem wziera, będzie równa sumie kątów w Czworokącie. A że ta suma kątów w dwóch Trójkątach, waży cztery kąty proste, więc i suma kątów w Czworokącie waży także będzie cztery kąty proste.

Niechby Figura miała pięć boków, to jest była Pięciokątem (Pentagonum.) Poprowadzimy od jednego wierzchołka, do dwóch drugich przeciwnych dwie Przekątne; podzieli one Pięciokąt na trzy Trójkąty. których suma ważności kątów, to jest 6. kątów prostych, będzie też sumą ważności kątów Pięciokąta.

Dowodzenie ogólne. Od wierzchołka kąta każdegokolwiek w Wielokącie, poprowadzimy tyle przekątnych, ile można. Potrzebujemy łatwo, że Trójkątów liczba z tego podziału wynikająca, mniejsza będzie dwoma, od liczby boków
Wie-

86. *Twierdź: 4. Pociągnawszy dalej w jedną stronę boki wszystkie Wielokąta, iakąkolwiek będzie liczba boków jego, zawsze*

Figury przyczali się Uczniowie dawać sprawę z tego, czego się nauczyli, a tym sposobem aby wprawiali się w zachowanie dobrego porządku, tak w wyobrażeniach, które sobie czynić będą, iako też i w samych wyrazach. Szczegulnicyszego zaś starania przytadać trzeba, aby bardziej rozumem, niż pamięcią wszystko to, czego się uczyć będą, ogarnywali. Z tej przyczyny przy rozwiązaniu niektórych zagadnień, opuszczano się umyślnie Figury. Niech jednak ztąd nie wnoszą Nauczyciele, aby wcale bez Figur obryśić się mogło; i owszem niech przyczalą Uczniów, aby ie sami sobie kreślić umieli z pamięci, zrozumiałwszy pierwszy Twierdzenia, do których dowodzenia stosować się mają te Figury. Przykłady dotąd przytoczone, tym sposobem się podawały, którym potrzeba, aby i Uczniowie dawali sprawę z działaniami dobrze od siebie pojętych. Odpowiedz najpospolitsza młodych jest, tych nawet, którzy lepiej rzecz przenikaia: Umieiam to, ale się wytłomaczyć nie mogę.

zawsze
nych, z
dym i
głego,
ste. (k)

Nim
dzenia,
przykład
zaczaws
zdy ką
głym w
ieł w
głemi w
trzy z
znayduia
te, ktor
trzne, y

Dow
trzny v
trznym
ste; wi
wewnet
waży d
ile jest

(k) M
rych
lęta
rych

zawsze jednak summa kątów zewnętrznych, zamkniętych między bokiem jednym i przedłużeniem drugiego przyległego, ważyć będzie cztery kąty proste. (k)

Nim się przystąpi do ogólnego Dowodzenia, trzeba pierwej na szczególnych przykładach tego Twierdzenia dowieść; zaczawszy od Troykąta, w którym każdy kąt z swoim zewnętrznym przyległym waży dwa kąty proste; a że kątów jest w Troykacie trzy, więc z przyległymi ważyć będą sześć kątów prostych; trzy zaś kąty, które się w Troykacie znajdują, waży dwa kąty proste; więc te, które są za Troykątem, to jest zewnętrzne, ważyć będą cztery kąty proste.

Dowodzenie ogólne. Każdy kąt wewnętrzny w wielokącie, z swoim zewnętrznym przyległym, waży dwa kąty proste; więc summa wszystkich kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych, waży dwa kąty proste wzięte tyle razy, ile jest boków w Wielokącie; a zatem
sum-

(k) Mówię tu tylko o wielokątach, w których kąt każdy mniejszy jest od dwóch kątów prostych: to jest o takich, w których kąty są wyskakujące (Salientes.)

summa samych kątów zewnętrznych, ważyć będzie tyle, ile białe summie kątów wewnątrz, aby ważyla dwa kąty proste, więc tyle razy, ile ma boków Wielokąt. Ale że, (jakośmy w poprzedzającym Twierdzeniu dowiedli,) brak ie do tego ey summie kątów czterech; więc summa kątów zewnętrznych Wielokąta ważyć będzie cztery kąty proste.

87. Uwaga 1. Największey wagi są te przypadki, w których kąty wszystkie Wielokąta są równe. Każdy w tym razie kąt zewnętrzny, waży 4. kąty proste, podzielone przez liczbę boków Wielokąta. Ważność zaś każdego kąta zewnętrznego znajdziemy, odtrąciwszy ten wieloraz, to jest: ważność jednego kąta zewnętrznego od dwóch kątów prostych.

Jeżeli wszystkie kąty wielokąta są równe, tedy im większy będzie każdy kąt jego zewnętrzny, tym mniejszy będzie wewnętrzny, a im mniejszy tamten, tym ten większy.

Po dowiedzionych tych Twierdzeniach, łatwo będzie Uczniom ułożyć sobie Tablicę ważności kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych w tych wielokątach, w których kąty wszystkie są równe, i

mo-

może te
być po-

88. U
Twierdze
wiązać i u

Jak wi
kąt dany
jest cztery
ry Proste
y której

1. Gdy
wne, czy
z kątów

kątów pro
stego; a
czynn 4.
osoko Pu

2. Gdy
równe, c

(1) M
gdzie
W lo
napela
zgin
re kąt

moga tę wartość wyrazić, czyli to przez kąty proste, czyli przez stopnie.

88. *Uwaga 2.* Umiejąc dowieść dwóch Twierdzeń poprzedzających, można rozwiązać i to, co następuje zadanie:

Jak wielorakiem sposobem około Punktu danego napelnić można miejsce (to jest cztery kąty proste) przez łączą Figury Prostokresnej jednego gatunku, (1) i które wszystkie kąty są równe?

1. Gdy Trójkąt ma wszystkie boki równe, czyli jest Równobocznym: każdy z kątów jego waży trzecią część dwóch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ jednego kąta prostego; a zatem sześć takich kątów, uczyni 4. kąty proste, i napelni miejsce około Punktu jednego.

2. Gdy Czworokąt ma wszystkie kąty równe, czyli jest Prostokątem; każdy z ką-

(1) Mnieć jednego gatunku. ponieważ gdyby wolno było mieszać kąty różnych Wielokątów, możnaby 14. sposobami napelnić miejsce około jednego Punktu, wymagając tylko tylko Wielokątów, które kąty wszystkie równe mają.

kątów iego jest kątem prostym, a zaty
4. takie kąty ważyć będą 4. kąty pro-
ste.

3. Kąt zewnętrzny Pięciokąta, które-
go kąty wszystkie są równe, waży $\frac{1}{5}$.
część czterech kątów prostych, albo $\frac{4}{5}$.
iednego kąta prostego, a zaty każdy
kąt wewnętrzny, ważyć będzie: $1\frac{1}{5}$ kąta
prostego. Trzy takowe kąty, czynią tyl-
ko 3. kąty proste i $\frac{3}{5}$ co jest mniej jak 4,
a cztery takie kąty, czynią 4. kąty pro-
ste i $\frac{4}{5}$, co jest więcej jak 4. Przeto
kątami Pięciokąta, mającego wszystkie
kąty równe, nie można napelnąć miejsca
około Punktu iednego.

4. Kąt zewnętrzny Sześciokąta, któ-
rego kąty wszystkie są równe, waży $\frac{1}{6}$.
część czterech kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$.
iednego kąta prostego; a zaty każdy
kąt wewnętrzny ważyć będzie: $1\frac{1}{3}$ kąta
prostego. Trzy zaś takowe kąty, czynią
zupelnie cztery kąty proste.

Jeże-

Jeżeli
ków. ka
będzie w
trzy wię
niż 4. k
mającego
wsze m
więc dw
pełnienie

Przet
wiązać
nie; to i
cztery
kąty Sz

Natur
dać w u

O Ró
wnych
nieniu
kresiney

Widzie
pad
ga prz
do ko

Jeżeli Wielokąt ma więcej niż 6. boków. każdy z kątów jego wewnętrznych, będzie większy od kąta w sześciokącie; trzy więc takowe kąty uczynią więcej niż 4. kąty proste; aże kąt Wielokąta mającego boki wszystkie równe, jest zawsze mniejszy od 2. kątów prostych; więc dwa takie kąty nie wyfarczą na napełnienie miejsca około Punktu jednego.

Przeto trzema tylko sposobami roz- *Fig. 5. 6.*
wiązać można wzwyż wyrażone Zada- *i Tab. V.*
nie; to jest przez 6. kątów Troykąta, przez *Fig. 1.*
cztery kąty Czworokąta, i przez trzy
kąty Sześciokąta.

Natura sama nauczyła Pszczoły układać w ulu komórki w sześciokąty.

ROZDZIAŁ V.

O Równoległobokach i Troykątach równych co do Powierzchni; i o zamienieniu jakiegokolwiek Figury Prostokreślnej na Troykąt i na Równoległobok.

Widzieliśmy w Rozdziale drugim przypadki, w których dwa Troykąty mogą przystać do siebie; i być zatym co do Powierzchni, równe. W Rozdziale trze-

trzecim widzieliśmy także, iż o dwa Równoległoboki, które miały i boki i kąty równe mogły przysłać do siebie; i że zatem Powierzchnie ich równe były. Te przypadki przytwarzania jednych figur do drugich były tylko, co do równości Powierzchni. przypadkami szczególnemi; ogólniejsze zaś w tej mierze Twierdzenia będą rzeczą tego Rozdziału.

39. *Twierdzenie x.* Dwa Równoległoboki zrobione na jedneyże Podstawie, a z przeciwney strony zakończone przez Liniją równoodległą od podstawy, mają Powierzchnie równe.

Fig. 2, Niech będą dwa Równoległoboki: ABCD, 3. 4. ABEF, których taż sama jest Podstawa AB, a kończy je z drugiej strony, równoodległa od Podstawy Linia: DE. Te dwa Równoległoboki, mają równe Powierzchnie, iakażkolwiek boków ich długość będzie.

Dowódz: Troykaty: DAF, CBE, mogą przysłać do siebie; boki odpowiednio AD, BC są równe, bo naprzeciwko leżące w Równoległoboku ABCD; boki też AF, BE, równe, bo naprzeciwko leżące w Równoległoboku ABEF. Kąty oprócz tego identyczne: ADF, BCE, i AFD, BEC. równe. Od-

Odławszy
Troykat
ry ABED;
wnoległob
wnoległob

To Tw
gura z pap
cząc od p
ra 2, gdi
dała. W
BEC rów
towi: A
wiec tak
ABEF zło
równych.

go. Da
spuszczon
linii, na
równe; i
kolwiek w
my do bo
dła, ta p
będzie wi
sta tego
drugiego
na, i któ
goż Rów
przedzina
Lwa k
siacę, i

Odiawszy tedy osobno *Troykat* DAF, i *Troykat* iemu równy CBE, od ca ey *Figury* ABED; reszty będą równe, to jest *Równoległobok* AFEB. równy będzie *Równoległobokowi* ABCD.

To *Twierdzenie* możnaby objaśnić *Figurą* z papieru grubego wyrobioną, i zacząć od przypadku, który wyraża *Figurę 2*, gdzie punkta C i F razem przypadają. W takim razie *Troykąt*: ACD, BEC równe są pierwszy i drugi *Troykątowi*: ABC, a zatym i sobie są równe; więc tak *równoległobok* ABCD, iako i ADEF złożony jest z dwóch *Troykatów* równych.

90. *Defn*: Ponieważ linie prostopadłe spuszczone od któregokolwiek Punktu linii, na drugą linią równoodległą, są równe; jeżeli więc od punktu któregokolwiek w boku *Równoległoboku* spuszcimy do boku przeciwnego linią prostopadłą, ta prostopadła iednakowey zawsze będzie wielkości, i nazywa się *Wysokością* tego *Równoległoboku*, względem drugiego boku, do którego jest spuszczo-
na, i który wzięty jest za *Podstawę* tegoż *Równoległoboku*. *Twierdzenie* poprzedzające możnaby też i tak wyrazić: *Lwa* *Równoległoboki* mające *spółną* *Podstawę*, i *wysokość* *iednakową*, są równe.

91. *Twierdzenie 2.* Dwa Równoległoboki są równe, których Podstawy i wysokości równe.

92. *Dowód:* Do Podstawy jednego z tych Równoległoboku, przyłożmy Podstawę drugiego; przystaną zupełnie do siebie te Podstawy, bo są równe; będą więc te postawione na sobie Równoległoboki miały spólną Podstawę, i równą wysokość, a zatem według pierwszego Twierdzenia będą równe.

93. *Twierdzenie 3.* Jeżeli dwa Równoległoboki zrobione na jednej Podstawie, równe mają Powierzchnie, równe też i wysokości mieć będą.

Fig. 5. Niech będą dwa Równoległoboki ABCD, ABFE, których obydwóch Podstawa jest AB, i równa Powierzchnia; mają one i wysokość jednakową, to jest zakończone są przez tę samą linią równoodległą od Podstawy.

Dowód: Gdyby Punkta F i E, nie były na linii DC, albo na iey przedłużeniu; toby inne jakie Punkta naprzykład H, i G. linii AF, BE, były na teyże linii DC, a zatem Równoległoboki ABCD, ABGH, byłyby równe. Aleśmy wzięli

za

za równe
więc i Ró
byłoby ró
że Punkta
Punkta F

W og
ległoboki
wierzchni
ści; a g
będą wy
i Podstaw

94. Tw
wnoległob
stawie, a
da na bok
i należący
na przed
kąt jest p

Niech
a Trojkat
podstawę
kąta przy
do Równ
będzie po

Przygo
my B,
sporkala

za równe Równoległoboki $ABCD$, i $ABEF$; więc i Równoległoboki $ABEF$, i $ABGH$ byłyby równe. co jest niepodobna, chyba że Punkta H i G , będą te same, co i Punkta F i E .

W ogulności mówiąc: Dwa Równoległoboki, mające równe Podstawy i Powierzchnie, mają też i równe wysokości: a gdy znów Równoległoboki mieć będą wysokości i Powierzchnie równe, i Podstawy ich równe będą.

94. *Twierdź:* 4. Gdy Troyką i Równoległobok, stoi na tejże samej Podstawie, a wierzchołek Troyką przypada na boku równoodległym od Podstawy i należącym do Równoległoboku, albo na przedłużeniu tegoż boku: taki Troyką jest połową Równoległoboku.

Niech będzie Równoległobok $ABCD$. *Tab. I. 7.*
a Troyką ABE ; mający z nim spólną *Fig. 1.*
podstawę AB ; i niech wierzchołek E . Troyką przypada na boku DC należącym do Równoległoboku; Troyką ten ABE ; będzie połową Równoległoboku $ABCD$.

Przygotowanie. Przez B poprowadźmy BE , równoodległą od AE , któraby spotkała DC , w F .

$E 2$

Dowo-

Dowodzenie. Troyką ABE, jest połową Równoległoboku ABFE, ponieważ bok BE Troyką jest Przekątną Równoległoboku: ABFE. Aże Równoległobok ABFE, ABCD, są równe, więc Troyką ABE, jest także połową Równoległoboku ABCD.

95. *Defin.* Prostopadła spuszczonej od wierzchołka Troyką do Podstawy, nazywa się *wysokością* tego Troyką. Twierdzenie tedy powyższe takby mogło być inaczej wyrażone: *Jeżeli Równoległobok i Troyką mają wspólną Podstawę, i wysokość równą. Troyką ten będzie połową Równoległoboku.*

96. *Wniosek.* Można więc przytłosować wszystko do Troyką, cokolwiek się o Równoległobokach powiedziało. - I tak :

1. Dwa Troyką mające równe Podstawy i wysokości, równe mieć będą i Powierzchnie.

2. Dwa Troyką równe w Powierzchniach, i w wysokościach albo w Podstawach; będą też miały równe Podstawy lub wysokości.

W ogulności zaś mówiąc: z tych trzech ilości; z Podstawy, wysokości, i powier-

wierzchni
ta, dwie
cią pozna
teczna, a
czyć mo
Rozdziale
wnoległ
tnych ile
wne mie

97. Z
głobok,
by tę sam

Rozw. q
Podstawy,
aż do bok
bi się Pro
kowi, co

Podobn
trzeba, ch
ny na dra
stawie i v
kolwiek
ity dany b

(m) Trze
ze to
nie za
myśli
wać.

wierzchni Równoległoboku lub Troyką-
ta, dwie którekolwiek wiadome, trze-
cią poznać daia; iedna zaś nie iest dosta-
teczna, aby z niej dwie drugie wyzna-
czyć można. Obaczemy dalej w tym
Rozdziale: iako można zrobić tyle Ró-
wnoległoboków równych i równoka-
tnych ile zechcemy, chociaż boki nieró-
wne mieć będą. (m)

97. *Zagadn.* I. Maiać dany Równole-
głobok, zamienić go na Prostokąt, który-
by tę samą miał Podstawę i Powierzchnią.

Rozwiązanie. Od obydwóch końców
Podstawy, wynieśmy linie prostopadłe,
aż do boku Podstawie przeciwnego; zro-
bi się Prostokąt równy Równoległobo-
kowi, co do Podstawy i Powierzchni.

Podobnym sposobem postąpić sobie po-
trzeba, chcąc zamienić Równoległobok da-
ny na drugi równy pierwszemu w Pod-
stawie i w Powierzchni, gdy inny iaki-
kolwiek kąt przy Podstawie, a nie pro-
sty dany będzie.

98.

(m) Trzeba to dobrze dać poznać Uczniom,
że wielkość Równoboków i Troykątów
nie zawisła od ich obwodu (Perimeter) o-
myśli w tej mierze częste zwykły by-
wać.

98. *Zagadn.* 2. Troyką dany zamienić na inny prostokątny, któryby miał tę samą Podstawę i Powierzchnią.

Rozwiązanie. Przez wierzchołek Troyką danego, poprowadźmy równoległą od Podstawy, a od końca któregośkolwiek teyże poditawy, wynieśmy prostopadłą aż do równoległej; Punkt przecięcia tych dwóch linii, będzie wierzchołkiem Troykąta, szukanego.

Podobnym sposobem postąpiemy sobie chcąc zamienić Troykąt dany na drugi równy mu w Podstawie i w Powierzchni: gdy inny a nie prosty kąt przy Podstawie dać będzie potrzeba temu drugiemu Troykątowi.

99. *Zagadn.* 3. Zamienić Troykąt dany, na Równoległobok prostokątny, któryby miał albo tę samą co Troykąt podstawę, albo tę samą wysokość.

Rozwiązanie. Równoległobok prostokątny, któryby miał tę samą Podstawę, i wysokość, co Troykąt; byłby dwa razy tak wielki; a zatem Równoległobok ten, którego szukamy, powinien mieć tę samą Podstawę co Troykąt, a połowę jego wysokości; albo też tę samą wysokość a połowę tylko Podstawy.

100. *Zagadn.* 1. Zamienić na chmi.

Rozwiązanie. kacie danego wierzchołka iec poditawę, wynieśmy prostopadłą aż do równoległej; Punkt przecięcia tych dwóch linii, będzie wierzchołkiem Troykąta, szukanego. Podobnym sposobem postąpiemy sobie chcąc zamienić Troykąt dany na drugi równy mu w Podstawie i w Powierzchni: gdy inny a nie prosty kąt przy Podstawie dać będzie potrzeba temu drugiemu Troykątowi.

100. *Zagadn.* 4. Czworokąt dany zamienić na Troykąt teyże samey powierzchni.

Rozwiąz. Poprowadźmy w Czworokącie danym przekątną, a przez wierzchołek jednego z kątów iey przeciwnych, pociągniemy równoległą od teyże przekątney. Wszystkie Troykaty mające za podstawę tę przekątną Czworokąta, a wierzchołek na równoodległej od tey przekątney będą równe w Powierzchni Troykatowi, który czyni ta przekątna z dwoma bokami Czworokąta schodzącemi się na równo do iey (96.) a zaiym będzie też rowny w powierzchni temu Troykatowi i Troykąt mający za Podstawę tę samą co i tamten przekątną, a za bok jeden, mający przedłużenie aż do równoległej, boku Czworokąta leżącego z drugiey strony przekątney; ten Troykąt ostatni dodawszy do Troykatu z drugiey strony przekątney leżącego, zrobi się Troykąt równy co do powierzchni Czworokątowi danemu; bo, ponieważ Troykaty dwa, na które jest Czworokąt przez przekątną podzielony, równają się co do powierzchni całemu Czworokątowi; więc temuż Czworokątowi równy także będzie co do powierzchni i Troykąt przez przekątną w Czwo-

ro-

rokacie uczyniony; a drugi równy w powierzchni Troykatowi drugiemu wchodzącemu także w Czworokąt i onego dopełniającemu.

Fig. 2. Niech będzie naprzykład ABCD Czworokąt dany; poprowadziwszy przekątną BD, i od niej równoległą CE, przez wierzchołek C, kąta DCB; gdy bok AB Troykata drugiego w Czworokacie pociągniemy aż do zeyścia się z równoodległą CE w punkcie E; zrobi się Troykat ADE równy co do powierzchni Czworokątowi ABCD.

101. *Uwaga.* Tym sposobem postąpimy sobie, chcąc zmniejszyć iednym bokiem Figurę jaką prostokreślną, bez odmierzenia tey powierzchni. Poprowadzimy nayprzod przekątną, któraby odcięła Troykat ieden w Figurze podaney; potem przez wierzchołek tego Troykata pociągniemy równoodległą od tey przekątney, aż do zeyścia się teyże równoodległej z bokiem drugim przyległym do przekątney; następny złączemy punkt przecięcia z drugim końcem teyże przekątney.

Można nawet użyć sposobu tego do zamienienia iakieykolwiek Figury prostokreślney,

kreśleć:
Y dana Fi
szące m
podany;
ieden, z
figury
ko bokó
ziemy.

Przy
ciokat
powierz

Popro
C i E po
aż do ich
zoną w
punkta z
i DE. Tr
wierchni

102. /
Troykat
legiobok
i Troyka
każda Fi
wsze na
w powie
nieć na

Kreślę, na Troyką teyże samey, co i podana Figura powierzchni; a to zmniejszając najprzód jednym boki Figure podaną; potem odeymuiac znowu bok jeden, zmniejszoney już jednym boki Figure i t. d. póty, póki do trzech tylko boków, to jest do Troyką nie przyziemiemy.

Przykład. Niechby trzeba zamienić Pięciokąt ABCDE na Troyką teyże samey powierzchni. Fig. 3.

Prowadźmy przekątne: DB, DA, przez C i E pociągnijmy równoodległe CG, EF, aż do ich zeyscia się z linią AB przedłużoną w Punktach G i F: złączmy te punkta z końcami przekątnych, przez DG i DF. Troyką DFG będzie równy w powierzchni Pięciokątowi danemu.

102. *Wniosek.* Widzieliśmy, (99.) że Troyką może być zamieniony na Równoległobok prostokątny, mający tę samą co i Troyką powierzchnią; a zatem można każdą Figure prostokreśliną zamienić zawsze na prostokąt nie różniący się od niej w powierzchni, mogąc ją pierwey zamienić na Troyką.

103. *Uwaga.* Niechby nam podano dwie jakie Figury prostokreślne, którebyśmy już zamienili obydwie na Prostokąty; i niechby te dwa prostokąty miały albo podstawy, albo wysokości równe. Łatwo nam będzie zrobić taki znowu prostokąt, któryby równy był w powierzchni, summie albo różnicy tych dwóch Figur podanych. Prostokąt albowiem, któryby miał podstawę równą summie albo różnicy Podstaw w obydwóch mniejszych Prostokątach (gdyby ich wysokości były równe) i tę samą co one wysokość, byłby równy w powierzchni summie tych Figur, lub ich różnicy. Wkrótce się także pokaże, iż można zamienić Prostokąt jeden na drugi, któryby był pierwszemu równy w Powierzchni, a miał w sobie bok jeden dany; a zatym można zawsze dwa Prostokąty do tego przyprowadzić, aby miały jeden bok równy w obydwóch; przeto można zawsze i Prostokąt taki zrobić, któryby równy był w powierzchni dwóm albo więcej Figurom prostokreślnym podanym.

104. *Twierdż:* 5. W jakimkolwiek Prostokącie, poprowadziwszy przekątną, a przez ten punkt którykolwiek pociągnąwszy dwie równoodległe od boków prostokąta, będą równe w powierzchniach dwa

dwa prostokąty
zrobione
dwóch ką

Niech
punkt E
w niodle
TEIB bę

Dow
wne. P
CEG. E
gi kica
z iroto
wn ier
LAH, r
i Prok
kątowi E

Twier
mu, gd
stokaty
można.

105.
mienić
któryby

Niech
mienić t
dana za

dwa prostokąty, przez te równoodległe zrobione, a ztykające się w wierzchołku dwóch kątów przeciwnych.

Niech będzie Prostokąt ABCD, przez punkt E, przekątną poprowadziwszy równoodległe: Hr, Gl; Prostokąty HEGD, FEIB będą równe w powierzchniach.

Dowódz: Trojkąty ACD, CAB są równe. Pierwszy składa się z Trojkątów CEG, EAH, i z Prostokąta HEGD. Drugi składa się z Trojkątów ECF, AEL, i z Prostokąta FEIB. Aże Trojkąt CEG, równy jest Trojkątowi ECF, a Trojkąt EAH, równy Trojkątowi AEL; wżę i Prostokąt HEGD, równy będzie Prostokątowi FEIB.

Twierdzenia podobnego poprzedzającego, gdy równoległobok nie będzie prostokątny, tymże samym sposobem dowiedzieć można.

105. *Zagad.* 5. Dany Prostokąt zamienić na inny tegoż samej powierzchni, któryby miał za bok, linią daną.

Niech będzie Prostokąt ABCD; ten zamienić trzeba na inny, w którymby linia dana za bok służyła.

Roz-

Rozwiąz: Pociągniemy dalej bok AB, aż do E, tak, aby linia BE, równa była linii danej. Dopełniemy Prostokąta DEFC, i poprowadźmy przekątną FB, któraby spotkała w punkcie G, bok przedłużony AD; weźmy potem FI, równą DG, i złączmy punkta G, i I, linią GI. To uczynwszy, Prostokąt EBHI, równy będzie co do powierzchni Prostokątowi ABCD, i za bok ma linią daną BE. Ze równe są te dwa Prostokąty, można okazać podobnym iak w ostatnim twierdzeniu sposobem.

106. *Uwaga 1.* Aby dodać dwa Prostokąty mające boki odmienne; trzeba najprzód jeden z tych prostokątów zamienić na inny równy z nim powierzchni, i któryby miał bok jeden równy bokowi prostokąta drugiego nie zamienianego. Wziawszy potem za wysokość, ten bok równy w dwóch Prostokątach, a za Podstawę, sumę dwóch innych boków odmiennych; zrobi się Prostokąt równy co do powierzchni sumie dwóch Prostokątów danych. Podobnie się postępuje, chcąc mieć ich różnicę.

107. *Uwaga 2.* Gdyby Prostokąty dane były Kwadratami; a Prostokąt równy ich summie miał też być Kwadratem; po-
prze-

przedziało
by na roz
żę obacz
fiąć trz

108.
tu, co t
ce o mie
ki są w
wanie t
Rów-oł
Troykąt
wysokoś

Aby d
którego p
chołku k
w liczbac
przekątną
prostopad
przez su
nakoniec
prostopad
ney liczb
rokat m
wierzchni
wi mają
dwóch R
łowe su
Czworo

przedzające wiadomości, nie dosyć byłyby na rozwiązanie tego zagadnienia. Niżej obaczemy, jak sobie w takim razie postąpić trzeba. (Obacz w Rozdz: VIII.)

108. *Przystosowanie.* Nie powtarza się tu, co się już powiedziło w Arytmetyce o mierzeniu Prostokątów, których boki są w liczbach, wyrażone. Przystosowanie terazniejsze ściągać się będzie do Równoległoboków iakichkolwiek, i do Troykątów, wyrażając podstawy ich i wysokości w liczbach.

Aby doysć powierzchni Czworokąta, którego przekątna i prostopadła od wierzchołka kąta iey przeciwnego spuszczone, w liczbach iest dana; trzeba rozmnożyć tę przekątną przez połowę summy obydwóch prostopadłych; albo połowę przekątney, przez sumnę tychże prostopadłych; albo nakoniec całą przekątną, przez całą sumnę prostopadłych, rozmnożyć, i rozmnożoney liczby wziąć połowę. Gdyby Czworokąt miał dwa boki równoodległe; powierzchnia iego byłaby równa Prostokątowi mającemu za wysokość odległość tych dwóch Równoległych, a za Podstawę połowę summy dwóch boków przeciwnych Czworokąta, których wiemy odległość.

Przy-

Fig: 6. *Przykłady.* 1. Niech będzie ABCD, Równoległobok *Pochyłaqiny* (obliquangulum) którego Podstawa AB, ma długości łokci 37. a wysokość DE łokci 20; powierzchnia jego będzie $20 \times 37 = 740$. łokci kwadratowych.

2. Niech powierzchnia Równoległoboku ABCD zawiera łokci kwadratowych 378. Podstawa AB, niech ma długości łokci 27. wysokość DE, będzie $\frac{378}{27} = 14$. łokci.

3. Niech będzie powierzchnia Równoległoboku ABCD = 544. łokci kwadratowych; wysokość DE = 17. łokci. Podstawa AB, będzie $\frac{544}{17} = 32$. łokci.

4. Niech znowu Równoległoboku ABCD podstawa będzie łokci 23. stop 1. cal. 10. to jest $23\frac{11}{12}$ łokci, wysokość DE łokci 14. stop. 1. cal: 8. to jest $14\frac{5}{6}$ łokci; powierzchnia będzie $14\frac{5}{6}$ razy $23\frac{11}{12}$ = $354\frac{55}{72}$ łokci kwadr: = 354. łok: kw: 3. stop. 8. cal:

5. Nie
ku ABCD
72. pret:
podstawa
153. 9.
2433. 72.

153. 9.
8. pret:

6. N

ku ABC
= 315.

Łok:
15.

podstawa

Stop:

7. Nie
rego pod
sokość CI
go będzie
zonych, c

Łok. kw:

8. N
ta ABC

5. Niech powierzchnia Równoległoku ABCD będzie $\equiv 8433$. sznur: Kwad: 72. pręt: kw: $\equiv 8433$. 72. sznur: kwad: podstawa AB $\equiv 153$. sznur: 9. pręt: $\equiv 153$. 9. sznur: wysokość DE, będzie $\equiv \frac{8433 \cdot 72}{153 \cdot 9} = 54$. 8. sznur: $\equiv 54$. sznur: 8. pręt:

6. Niech powierzchnia Równoległoku ABCD. będzie $\equiv 315$. 3. 58. $\equiv 315 \cdot \frac{245}{288}$. Ł. K. wysokość DE \equiv
 Łok: St: Cal: $\equiv \frac{11}{15} \cdot 12$ Łok:
 15. 1. 10. $\equiv 15 \cdot 12$ Łok:
 podstawa będzie $\equiv \frac{90965}{4584}$ Łok: \equiv Łok:
 Stop: 1. 8. $\frac{49}{191}$ Cal:

7. Niech będzie ABC Trojkąt, którego podstawa AB. $\equiv 28$ łokci. a wysokość CD $\equiv 16$ łokci. Powierzchnia jego będzie połową 28. przez 16. rozmnożonych, czyli $\equiv 28 \times 16. \equiv 28 \times 8. \equiv 224$.
 Łok. kw: $\equiv 2$

Tab:
 III.
 Fig. 1.

8. Niech będzie powierzchnia Trojkąta ABC $\equiv 156$. stop kw: a podstawa AD $\equiv 24$.

24. stop. Wysokość CD, będzie $\frac{1561}{1 \times 24} =$
 $\frac{312}{24}$ albo $\frac{156}{12} = 13$. stop.

9. Niech będzie powierzchnia Troyka-
 ta ABC = 195. Ł. kw: a wysokość CD =

15. łokci. Podstawa AB będzie $\frac{195}{1 \times 15} =$
 $\frac{390}{15} = 26$. Ł. kw:

10. Niech będzie ABC Troyką, któ-
 rego podstawa AB = $\frac{12}{2}$ pret: $\frac{5}{18}$ pret: Wysokość = $7 \cdot \frac{5}{6}$ pret:

powierzchnia będzie $= 7 \cdot \frac{5}{6} \times 6 \cdot \frac{5}{36} =$

48. $\frac{19}{216}$ pret: kw: = 48. pret: kw: 4. łok:
 kw: 3. stop. 114. cal: kw:

11. Niech będzie powierzchnia Troy-

Ł. kw: cal: kw: 10: kw:

kąta ABC = 25. 32. = $25 \frac{1}{18}$

Ł. cal: linii Łokci.

podstawa AB = 9. 2. 8. = $9 \cdot \frac{1}{9}$.

wysokość CD będzie $= \frac{451}{82} = 5$. Ł. 1. stop:

12. Niech będzie powierzchnia Trow-
kąt $\square = 21$. fzn: kw: 17. prę: kw: Wysó-
kość CD $\square = 5$. fzn: 8. prę: podława AB
będzie $\square = \frac{21 \cdot 17}{2 \cdot 9}$ albo $\frac{42 \cdot 34}{5 \cdot 8} \square = 7, 3$. fzn:
7. szn: 3. prę:

13. Niech będzie *Różnobiok* (Trapezium) Fig. 2.
ABCD mający tylko równocodległe boki AB,
CD; - bok AB $\square = 35$. łok.
bok CD $\square = 17$. łok.

A zatem summa ich $\square = 52$.
Wysokość DE $\square = 14$.
Powierzchnia tego Czworokąta będzie
 $\square = \frac{14 \times 52}{2} \square = 7 \times 52$, albo $14 \times 26 \square = 364$. ł.kw:

14. Aby powierzchnia takiego Czworokąta zawierała 255. cal: kw: którego
boki dwa równoległe są:
jeden AB $\square = 23$. cal:
drugi CD $\square = 11$.

A zatem summa $\square = 34$.
Trzeba mu dać wysokość $\square = \frac{255}{17} \square = \frac{510}{34} \square =$
15. cal.

15. Aby zaś powierzchnia takiego
Czworokąta zawierała 325 Stop: kw:
F gdy

gdy podstawa $AB = 31$ stop, a wysokość $ED = 13$. trzeba, aby summa boków równoodległych była $= \frac{325}{\frac{1}{2} \times 13} = \frac{650}{13} = 50$.
 stop: Aże bok $AB = 51$ stop. więc CD będzie $= 19$ stop.

16. Niech w takowym Czworokacie $ABCD$ boki równoodległe będą;

$$\begin{array}{rcll} AB & = & 20. & \text{pr: } 4. \text{ } 10. \text{ } 1. \text{ } 6. \text{ cal.} \\ CD & = & 13 & 5. \quad 1. \quad 4. \end{array}$$

A zatym summa $= 34. \quad 2. \quad 1. \quad 10. =$

$34. \frac{7}{18}$ pret:

Wysokość $DE = 9. \quad 5. \quad 1. \quad 8. = 9. \frac{7}{8}$

Powierzchnia będzie $= 9. \frac{7}{9} \times 17. \frac{7}{36} =$

$168. \frac{10}{81}$ pret: kw: 168 . prz: kw: 6 . łok: kw: st : kw: 112 . cal: kw:

Fig. 3. 17. Niech będzie Czworokąt jakikolwiek $AECD$, którego przekątna $DB = 86$. łokci; prostopadłe zaś do niej spuszczone;
 $AE = 39$.
 $CF = 23$.

A zatym ich summa $AE + CF = 64$. łok:
 Powierzchnia tego Czworokąta będzie $= 64 \times 86. = 32. \times 86$. albo $64. \times 43. = 2752$.

$\frac{2}{1000}$ łokci kw: 18 .

18. N
 $= 26$. łok
 Prostopadłe

A zatym A
 $= 25. \frac{1}{13}$
 Powier
 dzie $= 25$

19. N
 dzie bok
 Przekątne

Prostopadłe

Znajdzie

{ AEC
 { ABC
 { EDC

A zatym P
 ciokąta AB

18. Niech znowu będzie przekatna AB
 $\equiv 26$. fzn: 8. pret: 6. lok: $\equiv 26 \frac{2}{3}$. fzn:
 Prostopadłe: AE $\equiv 13$. fzn: 7. pret: 5. lok:
 CF $\equiv 11$. 9. 6. $\frac{1}{2}$.

A zatem $AE \times CF \equiv 25$. 7. +
 $\equiv 25 \frac{1}{2}$. fzn:

Powierzchnia Czworokąta AFCD bę-
 dzie $\equiv 25 \frac{1}{2} \times 13 \frac{1}{2} \equiv 346 \frac{1}{2}$. fzn: kw:

19. Niech w Pieciokącie ABCDE bę- Fig. 4.
 dzie bok - AE $\equiv 128$. lok:

Przekątne: $\begin{cases} AC \equiv 79. \\ CE \equiv 81. \end{cases}$

Prostopadłe: $\begin{cases} CH \equiv 49. \\ BF \equiv 42. \\ DG \equiv 39. \end{cases}$

Znajdziemy Powierzchnie Troykąłów:

$\begin{cases} AEC \equiv 49 \times 64. \equiv 3136. \text{ lok: kw:} \\ ABC \equiv 21 \times 79. \equiv 1659. \\ EDC \equiv 39 \times 81. \equiv 1579 \frac{1}{2}. \end{cases}$

A zatem Powierzchnia Pie-
 ciokąta ABCDE będzie $\equiv 6374 \frac{1}{2}$. lo: kw:

F 2 20.

Fig. 5. 20. Niech w Sześciokącie ABCDEF będą

Przekątne: $\begin{cases} AC = 100. \text{ łok:} \\ AE = 125. \end{cases}$

Prostopadłe: $\begin{cases} BG = 23. \\ DH = 80. \frac{1}{2}. \\ DI = 64. \frac{3}{4}. \\ FK = 42. \end{cases}$

A zatem $BG + DH = 103. \frac{1}{2}. \text{ łok:}$

$DI + FK = 106. \frac{3}{4}.$

Znajdziemy Powierzchnie Czworokątów:

$$\begin{cases} ABCD = 103 \frac{1}{2} \times 100. = 10350. \text{ ł. kw:} \\ ADEF = 53 \frac{3}{8} \times 125 = 6671. \frac{7}{8}. \end{cases}$$

Powierzchnia tedy całego

Sześciokąta będzie $= 17021. \frac{7}{8}. \text{ łok: kw:}$

Inaczej następującym sposobem znaleźć można Powierzchnią Sześciokąta: ,
ABCDEF.

Niech

Niech będzie

łok AB =

Równoległe: $\begin{cases} FG = \\ CH = \\ EI = \end{cases}$

Części prostopadłej DN.

$\begin{cases} DK = \\ KL = \\ LM = \\ MN = \end{cases}$

Azatem A

FC

C

Więc Troj

15. $\frac{9313}{34560}.$

Niech będzie

Fig. 6.

bok AB = szn: prz: fok:

Równodleg: { FG = 23. 7. $3\frac{1}{8}$
CH = 23. 2. $2\frac{13}{16}$

EI = 12. 2. $2\frac{3}{16}$ = 12. $\frac{11}{48}$ Sz: kw:

DK = 2. 4. $7\frac{7}{24}$ = 2. $\frac{179}{360}$

KL = 4. 6. $6\frac{1}{4}$ = 4. $\frac{41}{60}$

LM = 1. 0. $3\frac{3}{4}$ = 1. $\frac{1}{20}$

MN = 7. 8. $5\frac{5}{6}$ = 7. $\frac{79}{90}$

A zatem $AB \times FG = 43. 7. 3\frac{1}{8} = 43\frac{89}{20}$

$FG \times CH = 46. 9. 5\frac{15}{16} = 46\frac{47}{48}$

$CH \times EI = 35. 4. 5 = 35\frac{5}{17}$

Więc $Troykąt DEI = 1. \frac{179}{720} \times 12\frac{11}{48} =$

$15\frac{9313}{34560}$ szn: kw:

Czworo

Czwo-
rokaty. $\left\{ \begin{array}{l} EICH = 2 \cdot \frac{41}{120} \times 35 \cdot \frac{7}{15} = 83 \cdot \frac{23}{450} \\ CHFG = 1 \cdot \frac{1}{20} \times 23 \cdot \frac{47}{96} = 24 \cdot \frac{85}{128} \\ ABGF = 3 \cdot \frac{169}{180} \times 43 \cdot \frac{89}{120} = 172 \cdot \frac{6341}{21600} \end{array} \right.$

Sz: kw:
Cały więc Sześciokąt ABCDEF = $295 \frac{41}{120}$

Fig. 7. 21. Niech będzie Siedmiokąt ABCDEFG, w którym następujące wymiary znaleźliśmy, to jest:

Części przekątnej AD: $\left\{ \begin{array}{l} AH = 32 \frac{2}{3} \text{ stopy.} \\ HI = 35. \\ IK = 15 \cdot \frac{1}{3}. \\ KL = 81 \cdot \frac{1}{6}. \\ LM = 11 \cdot \frac{1}{6}. \\ MD = 13 \cdot \frac{1}{3}. \end{array} \right.$

Prostopadłe: $\left\{ \begin{array}{l} GH = 78 \cdot \frac{1}{2}. \\ BI = 56 \cdot \frac{1}{3}. \\ FK = 64. \\ EL = 86 \cdot \frac{1}{3}. \\ CM = 45 \cdot \frac{1}{6}. \end{array} \right.$

stop: kw:
Będą $\left\{ \begin{array}{l} AHG = 16 \cdot \frac{1}{2} \times 78 \cdot \frac{1}{2} = 1282 \cdot \frac{1}{6}. \\ tedy \quad ABI = 28 \cdot \frac{1}{2} \times 67 \cdot \frac{1}{3} = 1905 \cdot \frac{1}{3}. \\ Troy \quad DLE = 43 \cdot \frac{1}{2} \times 25 \cdot \frac{1}{6} = 1086 \cdot \frac{1}{6}. \\ kąty: \quad CMD = 6 \cdot \frac{1}{3} \times 45 \cdot \frac{1}{6} = 305 \cdot \frac{1}{9}. \end{array} \right.$

Czwo-

Czworo-
rokąty: $\begin{cases} HKFG = 26\frac{1}{2} \times 142\frac{1}{2} = 3568\frac{1}{4} \\ KLEF = 81\frac{1}{2} \times 75\frac{1}{2} = 6151\frac{3}{4} \\ BCML = 109 \times 51\frac{1}{2} = 5568\frac{1}{2} \end{cases}$

A zatem cały Siedmiokąt ABCDEFG =
19885 $\frac{1}{2}$. stop: kw:

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIA- ŁOW NASTĘPUJĄCYCH.

*O podniesieniu liczby do Kwadratu i wy-
ciągnięciu z niej pierwiastku kwadratowego.*

Lubo nauka, która się tu wykładać bę-
dzie, ma częste używanie w wyższych
rachunkach, bardziej jednak jest potrze-
bna w Geometrii. W następujących Roz-
działach, różne zdarzą się użycia iey o-
koliczności. Tam fundamenta, na któ-
rych się załada, iasniey zrozumiane bę-
dą, niż gdyby na zawilszych działaniach
rachunkowych były okazane, zwiłaszcza,
gdy ieszcze Algebra uczniom iest niezna-
ioma.

109. Def: Kwadrat liczby; iest to
ta sama liczba przez siebie rozmnożona.
Okazać to można z Geometrii, w któ-
rey aby znaleźć pole Kwadratu, trzeba
rozmnożyć przez siebie liczbę znaczącą
wielkość boku tegoż Kwadratu.

Y tak dziewięciu liczb pierwszych :

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Kwadraty są:	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.
Liczb:	10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.
Kwadraty są:	100.	400.	900.	1600.	2500.	3600.	4900.	6400.	8100.
Tych też:	1000.	2000.	3000.	-	-	-	-	-	9000.
Kwadraty będą:	1000000.	4000000.	9000000.	-	-	-	-	-	81000000.

110. Ztąd się wnosi, że kwadraty liczb, które iedną cyfrę mają, a resztę zerów, składają się z kwadratu teyże samey cyfry, i z tyle dwoie następujących zerów, ile ich było w tey liczbie.

111. Gdy się robi Kwadrat z liczby, na przykład z 37. mnożąc 37. przez 37; mnoży się najprzód 7. przez 7. to jest robi się Kwadrat z 7. potym mnoży się 30. przez 7. daley 7. przez 30. albo drugi raz znowu 30. przez 7. naostatek mnoży się 30. przez 30. to jest bierze się Kwadrat z 30. Jest tedy liczba rozmnożona 1369. kwadratem trzydziestu siedmiu, złożonym z kwadratu trzydziestu, z liczby 30. rozmnożoney dwa razy przez 7. i z kwadratu 7. Ta reguła jest ogulna ściągająca się do kwadratów liczb wszystkich, które na dwie części podzielić można.

Niech

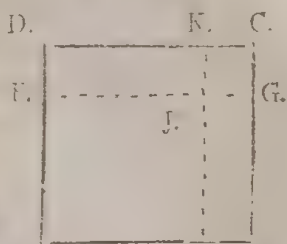
Niech
19. uważa
niekiedy
szkał z
Pierwsza
8. iest li
rzech 4.
Jakoż fu
iest: 25.
byś py u
liczb 2.
fajam 2
12. 9. k
4. białby
z r. zu no
czbi 9. by

Toż samo
cznie pok
może spo
Geometri

Niech
jedzie na
Siozy iaki
da acy fi
części zero
też zese
części ew
bny dwa

Niech będzie na przykład liczba 5, którą uważamy być złożoną z 1. i z 4. kwadrat tej może być uważany, jakby się składał z trzech kwadratów: 1. 8. 16. Pierwsza 1. jest kwadratem z 1. druga 8. jest liczbą pot. złożoną dwa razy z 1. przez 4. trzecia 16. jest kwadratem z 4. Jakoż summa tych trzech kwadratów 1. 8. 16. jest: 25. a 25. jest kwadratem z 5. Gdybyśmy uważali 5. jako złożony z tych dwóch liczb 2. i 3. kwadrat z 5. brałby się tym samym za sumę z tych trzech liczb: 4. 12. 9. która summa jest także 25. Liczba 4. byłaby kwadratem z 2. liczba 12. byłaby z rozmnożenia dwa razy 2. przez 3, a liczba 9. byłaby kwadratem z 3.

Toż samo widocznie pokazuje się może sposobem Geometrycznym.



Niech linia AB będzie na miarę. Niechby iakiey była A. E. B. dającey się z sobą i dającey się nawzajem części z siebie, a w sobie też i na AB. Linii tej części: AE, EB, ułóż z siebie części dwie, które tę liczbę składają; zrobimy kwadrat ABCD z linii AB, a wzięwszy

wszy linią AF równą AE, pociągniemy przez F i E dwie linie FG, i EK, równo-
odległe od boków kwadratu, i przecię-
niające się w punkcie J. Kwadrat AEIF.
będzie z części AE. linii AB. Kwadrat
IGCK, będzie z części EB, linii także AB.
Prostokąty: FIKD, EBGL, będą obadwa z
linii: AE i EB. to jest z części jednej,
linii AB i z części drugiej.

112. Wygodna rzecz jest, liczbę, której
kwadratu szukamy rozłożyć na jedności,
dziesiątki, sta, i t. d.

Przykład 1. Chcę mieć kwadrat z 24.

Rozkładam tę liczbę na dziesiątki, i
na jedności, to jest na 20. i na 4.

Będzie 1. 400. kwadrat z dziesiątków.

2. 160. liczba dwa razy roz-
mnożona z dziesiątków
przez jedności.

3. 16. Kwadrat z jedności.

Summa - - 576. Kwadrat z 24.

Przykład 2. Chcę mieć kwadrat z 36.

1. 900. Kwadrat z 30.

2. 360. dwa razy 30. przez 6.
rozmnożone.

3. 36. Kwadrat z 6.

Summa - - 1296. Kwadrat z 36.

Przy-

Przyk-

Summa -

Przy-

Summa -

113. U
my w ty
składająca
dnym ze
poprzedzi
zdey liczy
ku prawe
nad nią.

Przykład 3. Chcę mieć Kwadrat z 324.

1. 60000. Kwadrat z 300.
2. 12000. Dwa razy 300.
przez 20.
3. 400. Kwadrat z 20.
4. 2560. Dwa razy 320.
przez 4.
5. 16. Kwadrat z 4.

Summa - - - 10496. Kwadrat z 324.

Przykład 4. Chcę mieć Kwadrat z 4687.

1. 16000000. Kwadrat z 4000.
2. 4800000. Dwa razy 4000.
przez 600.
3. 360000. Kwadrat z 600.
4. 736000. Dwa razy 4600.
przez 80.
5. 6400. Kwadrat z 80.
6. 65520. Dwa razy 4680.
przez 7.
7. - - 49. Kwadrat z 7.

Summa - - - 21907969. Kwadrat z 4687.

113. Uwaga 1. Poprzedz łatwo możemy w tych przykładach, że każda liczba składająca po części kwadrat cały, ma iednym zero mniej, niżeli ta, która ją poprzedziła; a zatym cyfra iedna w każdej liczbie niższej występuje bardziey ku prawey ręce, niż w tej, która iest nad nią.

Wi-

Widziemy zatem, że możnaby opuścić zera, pisząc cyfry same tym sposobem iedne pod drugimi, aby w każdym rzędzie niższym, cyfra iedna w prawą coraz bardziey wychodziła. I tak opuściwszy zera w przykładzie ostatnim tym porządkiem szłyby same cyfry.

$$\begin{array}{r}
 16. \\
 +8. \\
 36. \\
 736. \\
 64. \\
 6552. \\
 \hline
 49. \\
 \hline
 \text{Summa } 21967969.
 \end{array}$$

2. W pierwszym rzędzie, gdzie iest 16. opuszczając zerów sześć, a zatem 16. znaczy 16. millionow, to iest Kwadrat z 4000. czyli z pierwszego po lewey ręce znaku liczby 4687. W drugim rzędzie gdzie iest 48. opuszcza się zerów pięć, a zatem 48. znaczy 4. milliony 8. króć sto tysięcy, i dla tego 4. piszą się pod iednościami millionow, a 8. występuje. Ta zaś liczba 48. pochodzi z rozmnożenia pierwszego po lewey ręce znaku 4. liczby 4687. przez drugi znak 6, teyże liczby dwa razy wzięty. W trzecim rzędzie opuszcza się zerów cztery, a zatem 36. znaczy trzykroć sto tysięcy, i 6. dzie-

dziesiątków ty
pod siebie
zawsze liczba
po lewey
czwartym
trzy, a za
dziesięci sz
się pod o
Stępuje. T
mnożenia
ręce zaa
trzeci za
i t. d.

3. W
dolu do g
w pierwsz
wey ręce
gim rzędz
cim rzędz
rzędzie 6

4. Ta
dolu rzęd
7; i praw
stępuje. T
64. iest
przeto pr
ita, mniej
try 49. k
ta w porz

siatków tysięcy, i dla tego 3. piszą się pod stemą tysięcy, a 6. występuje. Ta zaś liczba 36. znaczy kwadrat drugiego po lewey ręce znaku 6. liczby 4087. W czwartym rzędzie opuszcza się zerów trzy, a zatem 736. znaczy siedmiokroć trzydzieści sześć tysięcy: i dla tego 3. piszą się pod dziesiątkami tysięcy, a 6. występuje. Ta zaś liczba 736. pochodzi z rozmnożenia dwóch pierwszych po lewey ręce znaków 46. liczby 4687, przez 8, trzeci znak tejże liczby dwa razy wzięty i t. d.

3. W takowym liczb ułożeniu, idąc od dołu do góry, to jest zaczynając od 49; w pierwszym rzędzie, pierwsza po prawey ręce cyfra 9. znaczy jedności; w drugim rzędzie 2. znaczy dziesiątki; w trzecim rzędzie 4. znaczy seta, w czwartym rzędzie 6. znaczy tysiące i t. d.

4. Ta sama liczba 49. w pierwszym od dołu rzędzie znaczy kwadrat z jedności 7; i prawa tedy cyfra 9. najbardziej występuje. Trzecia w tym porządku liczba 64. jest kwadratem z dziesiątków 8, i przeto prawa tedy cyfra 4. jest znacząca seta, mniej występuje, niżeli obydwie cyfry 49. kwadratu z setnych jedności. Piąta w porządku liczba 36. jest kwadratem ze
stów

ślow 6; i przeto prawa iey cyfra 6. iako znacząca dziesiątki tysięcy, ma przed sobą kwadraty z dziesiątków i z iedności. Nakoniec siódma i najwyższa liczba 16. iest kwadratem z tysięcy 4. i przeto prawa iey cyfra 6. ma przed sobą kwadraty ze ślow. dziesiątków i iedności. W summie wiec 21.067.969. na miejscach nie parzystych, od prawey ręki rachuiąc kończyć się będą kwadraty z liczb pojedynczych, z których się składa cały kwadrat; to iest kwadrat z iedności kończyć się będzie tam, gdzie ostatnie po prawey ręce 9. napisane; kwadrat z dziesiątków tam, gdzie iest drugie 9; kwadrat ze ślow tam, gdzie iest 6; kwadrat z tysięcy, gdzie 1.

5. Dla podobney przyczyny w summie teyż 21.067.969. kwadrat wyrażający (rachuiąc zawsze od prawey ręki) na miejscach parzystych, drugim, czwartym, szóstym i t. d. kończyć się będą liczby pochodzące z rozmnożenia pojedynczych znaków, z których kwadrat urośł, przez te wyżyskie, które ie poprzedzały.

Trzeba to ieszcze bardziey objaśnić na wielu innych przykładach kwadratów, tymże samym co wyżej porządkiem części ich układając.

114. *Wniosek 1.* Gdy tedy mamy liczbę jaką kwadratową, możemy dojść z iak wielę znaków liczebnych przez siebie rozmnożonych urobić ten kwadrat; to jest możemy dojść wielę znaków pierwiastku kwadratowego. Po iacirze taki pierwiastek zowie się (*Radix quadrata*.) Dojdziemy zaś tego, oddzielając kreskami albo kropkami od prawey ręki zaczawszy po dwa znaki liczebne. Liczba takich oddziałów pokaze wielę znaków liczebnych pierwiastku. Na przykład liczba 576, będzie miała dwa oddziały, które tak oznaczam 5.76. a zatym pierwiastek iey zdwoich się składa znaków. Pierwiastek iey liczby: 10.40.76. będzie miał trzy znaki liczebne, bo w iey trzy oddziały zrobić można. Pierwiastek liczby 21.06.70.00. nade iędzie cztery znaki, bo cztery także w nim oddziały uczynić można, i t. d.

115. *Wniosek 2.* Ponieważ w wiekszych nieparzystych liczby kwadratowej, kończą kwadraty znaków poicdyjących tę liczbę składających, mogą zaś znaki liczebne w kwadracie być nieparzyste: więc w takim razie: w pierwszym zaraz od lewey ręki znaku kwadratu, znaleźć można znak pierwszy pierwiastku tegoż kwadratu; a zatym oddzielając kreskami co dwie liczby, od prawey ręki do lewey,

węz. na osłami oddziel. może tylko przypa-
ścić znak. Ten liczb. Tak jak wy-
żej widzieliśmy w tym kwadracie 576.

PRZKŁAD T.

116. Niechby z tej samej liczby: 576.
wyciągnąć trzeba było pierwiastek kwadra-
towy. Ta liczba mogąc mieć dwa oddzia-
ły, będzie też miała dwa znaki w pier-
wiaſtku, to jest znak dziesiątków. i znak
jedności. Pierwszy znak pierwiaſtku ta' i
być powinien, aby kwadrat jego nie prze-
chodził 5. setów; taki kwadrat jest 4. seta,
albo 400, którego pierwiastek. 20. dziesią-
tki, albo 20. Kwadrat 400, pierwszego
tego znaku pierwiaſtkow. go 20, odiawszy
od 576. zostanie 176. Ta reszta pozosta-
ła powinna jeszcze zamykać w sobie dru-
gi znak pierwiaſtku rozmnożony przez
pierwszy 20. dwa razy wzięty, i nadto
kwadrat tegoż drugiego znaku; więc ie-
żeli przez tenże znak 20, dwa razy wzię-
ty, to jest przez 40. podzielimy resztę
176, wieloraz pokaże drugi znak pier-
wiaſtku złożony z jedności. Podzie-
liwszy 176, przez 40. wieloraz będzie
4. jedności. Te 4. jedności rozmnożyw-
szy przez 40, wypa nie 160, które 160.
odiawszy od 176. zostanie 16. W tej
reszcie 16. znaydować się jeszcze powi-
nien.

nien kwadr
drości 4.
zupelnie,
tu 5-6. bę

Tymże
pierwiaſtek

Niechby
stek, z kw

nien kwadrat znaku pierwiastkowego iedności 4. to jest 16. a że się znajduje zupełnie, więc cały pierwiastek kwadratu 576. będzie: 24.

Wzór działania.

$$\begin{array}{r} 576 | 20. \\ \underline{400} \text{ kwadrat z } 20. \\ 176 \\ 40 | 176 | 4. \\ \underline{160} \text{ z rozmnożenia } 40 \text{ przez } 4. \\ 16. \text{ Reszta.} \\ 16. \text{ Kwadrat z } 4. \\ \underline{0.} \end{array}$$

Tymże sposobem wyciągnąć można pierwiastek kwadratowy z tej liczby 144.

Wzór działania.

$$\begin{array}{r} 144 | 10. \\ \underline{100} \text{ kwadrat z } 10. \\ 44 \\ 20 | 44 | 2 \\ \underline{40} \text{ z rozmnożenia } 20. \text{ przez } 2. \\ 4. \text{ Reszta} \\ 4. \text{ Kwadrat z } 2. \\ \underline{0.} \end{array}$$

Niechby potrzeba wyciągnąć pierwiastek, z kwadratu: 692224.

G

Oddziel-

Oddzieliwszy iak wyżej kreskami co dwie liczby od prawey ręki, będzie trzy oddziałow, a zatym i trzy znaki w pierwiaſtku. Kwadrat naybliżej przyſtępujący do 69. ieſt 64, którego pierwiaſtek ieſt 8; więc 8 ſtów, będzie znakiem pierwſzym pierwiaſtku. Odiąwszy kwadrat 8. ſtów, to ieſt 640000. od 692224. zoſtanie 52224. Ta reſzta powinna zamykać pierwſzy znak 800 pierwiaſtku dwa razy wzięty, przez drugi znak dzieſiątkow rozmnożony; i kwadrat drugiego znaku pierwiaſtku; powinna ieſzcze zamykać dwa te pierwſze znaki ſtów i dzieſiątków rozmnożonych przez trzeci znak iedności dwa razy wzięty, i nakoniec kwadrat znaku tegoż iedności. Wſzczegulności zaś mówiąc, powinna zamykać 800, dwa razy wzięte, to ieſt 1600. rozmnożone przez znak dzieſiątkow, którego ſzukamy. Podzieliwszy tedy 52224. przez 1600. znajdziemy na wieloraz 30, albo 3 dzieſiątki; a zatym 3 dzieſiątki będą znakiem drugim Pierwiaſtku. 1600. rozmnożone przez 30, czynią 48000, które od 52224 odiały, zoſtanie 4224. Ta reſzta ma ieſzcze zamykać kwadrat z 30, to ieſt 900, które 900. od 4224 odiały, zoſtanie 3324,

Ta reſzta powinna zamykać część pierwiaſtku znalezioną 830, dwa razy wziętą,

ta, i roz
pierwiaſtku
kwadrat ty
3324 przez
razy wzięt
iedności p
żywszy i
odiały
reſzta ied
ły więc
będzie 83

1600

Trzeba
dow Uczn
dnego ielz
ſtępujące

ta, i rozmnożoną przez znak iedności pierwiastku, i iedzce zamykać powirna kwadrat tychże iedności. Podzielnym więc 3324 przez 1660, to iest przez 830 dwa razy wzięte, a wieloraz 2. będzie znakiem iedności pierwiastku. Przez te 2. rozmnożywszy 1660, i iedzę rozmnożona: 3320, odjąwszy od 3324, zostanie 4, która to reszta iest kwadratem z 2 iedności. Cały więc pierwiastek kwadratu: 692224, będzie 832.

Wzór działania.

$$\begin{array}{r}
 69.22.24. | 800 \\
 \underline{640000} \\
 1600. | 52224 | 30 \\
 \underline{+ 8000} \\
 4224 \\
 \underline{900} \\
 1600 | 3324 | 2 \\
 \underline{3320} \\
 4 \\
 \underline{+} \\
 0.
 \end{array}$$

Trzeba iako! naywięcey takich przykładów Uczniom podawać, nieużywając żadnego ieszcze skrócenia. Na wzór dwa następujące przykłady podają się.

G2

Przy-

Przykład I.

$$\begin{array}{r}
 46,02,26,56 \mid 6000. \\
 36 \ 00 \ 00 \ 00 \\
 \hline
 12000 \mid 10 \ 02 \ 26,56 \mid 700. \\
 8 \ 40 \ 00 \ 00 \\
 \hline
 1 \ 62 \ 26 \ 56 \\
 49 \ 00 \ 00 \\
 \hline
 13400 \mid 1 \ 13 \ 26 \ 56 \mid 80 \\
 107 \ 20 \ 00 \\
 \hline
 6 \ 06 \ 56 \\
 64 \ 00 \\
 \hline
 13560 \mid 5 \ 42 \ 56 \mid 4 \\
 5 \ 42 \ 40 \\
 \hline
 16 \\
 16 \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

Przykład II.

$$\begin{array}{r}
 13,59,39,69 \mid 3000 \\
 9 \ 00 \ 00 \ 00 \\
 \hline
 6000 \mid 4 \ 59 \ 39 \ 69 \mid 600. \\
 3 \ 60 \ 00 \ 00 \\
 \hline
 99 \ 39 \ 69 \\
 36 \ 00 \ 00 \\
 \hline
 7200 \mid 63 \ 39 \ 69 \mid 80 \\
 57 \ 60 \ 00 \\
 \hline
 5 \ 79 \ 69 \\
 64 \ 00 \\
 \hline
 7360 \mid 5 \ 15 \ 69 \mid 7. \\
 5 \ 15 \ 20 \\
 \hline
 49 \\
 49 \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

117. *Uwaga.* Jako w dzieleniu zwy-
czaynym, tak i w wyciąganiu Pierwia-
tku kwadratowego, można się (kto jeszcze
nie jest wprawnym) łatwo pomylić w zna-
kach wielorazu. Omyłka w dzieleniu łat-
wa jest do poprawienia, gdy uważać bę-
dziemy, jeżeli liczba dzieląca rozmnożo-
na przez wieloraz odjąć się może od czę-
ści liczby podzieloney, którą dzielić przy-
pada, albo jeżeli reszta nie jest większa
od

od liczy dz
wielka kw
na jedno pr
by liczba dz
można takż
podobną, i
czyniąc u
nieć należ
spółobem
nią oacy
kayprzod
ładującą P
włóre od
Pierwia-
pierwie ty
drugiego i
bylbysmy,
wielki, a z
W ostatni
włzym, 120
800 w 100
gło się znay
ale nie mo
kwadraty
w obydwó
wieloraz z

118. *Prz.*
wyciąganiu
żyć można
liczbie dzi

od liczby dzielącej. W wyciąganiu Pierwiastku kwadratowego. (które wychodzi na jedno prawie co i dzielenie, w którymby liczba dzieląca co raz się odmieniała) można takż o nykę jakąkolwiek pośrzedz podobną, jak przy zwycaynym dzieleniu, czyniąc uwagę: wzgląd iestżce i na to mteć należy, że wyciągając pierwiastek sposobem wyżej podanym, dwa się czynią odeymowania; to iest odeymnie się najprzód liczba dzieląca przez część przypadającą Pierwiastku i mnożona, i powtóre odeymnie się kwadrat teyże części Pierwiastku; więc, gdyby zdarzyło się, że pierwsze tylko odcięcie uczynić można, a drugiego już niemożna; ostrzeżeni tym bylibyśmy, żeśmy wzięli wieloraz bardzo wielki, a zatym zmniejszyć go potrzeba. W ostatnich dwóch przykładach, w pierwszym, 12000, zmieścić się mogło razy 800 w 1002256; a w drugim, 6000, mogło się znajdować 700 razy w 4593969; ale nie możnaby było od reszty odjąć kwadraty tychże wielorazów; i przeto w obydwóch tych przykładach iednością wieloraz zmniejszyliśmy.

118. *Pierwsze skrócenie*, którego przy wyciąganiu Pierwiastku kwadratowego użyć można, iest w opuszczeniu zerów w liczbie dzielącej, podzielney, i w wielorazie,

razie, zachowując jednak cyfrom pozostłym te miejsca, któreby zastępować powinny, gdyby zera odcięte niebyły.

119. *Powtore.* Ponieważ ostatnie po prawey ręce znaki kwadratu podanego do wyciągania Pierwiaſtku, cale się nieodmieniają. Po pierwszych odeymowaniach; nie są więc do nich potrzebne; a zatym do każdego wszechułości odeymowania, można te tylko cyfry spuszczać z kwadratu, od których odeymować przypada liczbę dzielącą przez wieloraz rozmnożoną; zachowując im miejsce i znaczenie to samo, które miały w całym kwadracie.

120. *Potrzecia.* Zamiast dwóch odeymowań, nayprzod liczbę dzielącej przez wieloraz rozmnożonej, potym kwadratu tegoż wielorazu, można obadwa razem czynić odeymowania: kładąc znak znaleziony na wieloraz, nie tylko na zwyczajnym swym miejscu, ale też przy końcu liczbę dzielącej, i dopiero tak powiększoną liczbę dzielącą mnożyć przez ten znak wielorazu, a rozmnożoną od liczb przypadających z kwadratu, odeymować.

Tu na tych samych liczbach kwadratowych, z których już uczniowie wyciągali pierwiaſtek, niechay użył tych trzech sposo-

spofobów
będzie lat
go spofobu
wiąc dzie

121. W
sobem pie
13593969

Naypr
dwie lic
liczby k
widziemy
liczebne
tku. Kw
po prawey
9, którego
ce. Odr
stanie 4, d
następując
pierwizy
Te 6, w
liczby 45
ięc wż
niem, g
ko 6. na
my ie tak
mnożyw
żoną 39
do które
dratu nafi

sposobów skrócenia: bo im inż i działanie będzie łatwieysze, i lepiey dokładność tego sposobu skróconego obacza, porówny-
wając działanie pierwsze z drugim.

121. Wyciągniemy tym skróconym spo-
sobem pierwiastek kwadratowy z liczby
13593969.

Nayprzód odzielić trzeba kreskami co
dwie liczby, iak wyżej; oddzieliwszy tak
liczby kwadratu podanego 13.59.39.69,
widać, że ten kwadrat cztery znaki
liczebne mieć będzie w swoim Pierwia-
stku. Kwadrat naybliższy w pierwszym
po prawey ręce oddziale zawarty, będzie
9, którego Pierwiastek, 3, znaczący tyśią-
ce. Odiąwszy ten kwadrat 9, od 13, zo-
stanie 4, do których przypisawszy oddział
następujący: 59, będzie 459. Podwoimy
pierwszy znak Pierwiastku 3, i będzie 6.
Te 6, w pierwszych dwóch znakach 45,
liczby 459, znalazłoby się razy 7, ale ma-
jąc wzgląd, że kwadrat tego wielorazu
niemógłby się potym odjąć, położmy tyl-
ko 6, na miejscu wielorazu, i przypisz-
my ie także do 6, liczb dziesiącey. Roz-
mnożymy 66, przez 6, i liczbę rozmno-
żoną 396, odławszy od 459, zostanie 63,
do której reszty przypiszmy oddział kwa-
dratu następujący 39; i dzielimy daley 639,
przez

przez dwa znaki Pierwiaſtku znalezione, 36, podwoiwszy ie; to ieſt przez 72. 72 w 633 znayduie ſię razy 8. Napiſzmy 8. na wieloraz, i przypiſzmy ie do liczby dzielącej 72. Rozmnożywszy 728, przez 8. będzie 5824. które odiawszy od: 6339. zoſtanie 515. Dopiſzmy do tey reſzty, oſtatni kwadratu oddział 69; i 51569. dzielmy przez podwoyną liczbę znakow Pierwiaſtku iuż znalezionej 368; to ieſt przez 736. 736 w 5156 znajdziemy razy 7. Przypiſzmy te 7. do 368, i do 736. Rozmnożywszy 7367. przez 7. i liczbę rozmnożoną 51569. odiawszy od 51569 nie zoſtanie; a zatym kwadratu podanego pierwiaſtek będzie: 3687.

Wzór działania.

13.59.39.69|3687.

$$\begin{array}{r}
 9 \\
 \hline
 66|+5.9 \\
 396 \\
 \hline
 728|633.9 \\
 5824 \\
 \hline
 7367.|5156.9 \\
 51569 \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

122
jakiey liczy
co rozmno
same, czyli
rych jedn
ułamku i
licznik, ie
a mianow

go. Y t

z $\frac{1}{3}$ ieſt

ty ułamko

Chcąc te
dratowy z
sobno wyc
nownika.

tych ułomi

123. U
Pierwiaſtek
ney, to ie
tey, i z u
cie na sam

wyciągnąc

będzie jed

122 *Wniosek.* Ponieważ wyniesienie jakiej liczby do kwadratu jest to jedno, co rozmnożenie tej liczby przez siebie samę, czyli rozmnożenie dwóch liczb równych jednej przez drugi kwadrat więc ułamku jakiego, będzie ułamek, którego licznik, jest kwadratem licznika tamtego, a mianownik kwadratem mianownika tego. Y tak kwadrat z $\frac{1}{2}$, jest $\frac{1}{4}$, kwadrat z $\frac{1}{3}$, jest $\frac{1}{9}$, kwadrat z $\frac{2}{3}$, jest $\frac{4}{9}$, kwadrat z $\frac{1}{4}$, jest $\frac{1}{16}$, i t. d. y. t. d. ty ułomkow $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{9}{16}$.

Chcąc tedy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z ułamka podanego, trzeba osobno wyciągnąć go, z licznika i z mianownika. Y tak Pierwiastki kwadratowe tych ułomkow; $\frac{9}{16}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{25}{36}$ i t. d. są $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ i t. d.

123. *Uwaga.* Gdy się trafi wyciągać Pierwiastek kwadratowy z liczby mieszanej, to jest złożonej z liczby całkowitej, i z ułamka; trzeba ją pierwey obrócić na sam ułamek. Tak na przykład chcąc wyciągnąć pierwiastek z $2\frac{1}{4}$, liczba ta będzie jedno co ułamek $\frac{9}{4}$, którego pierwiastek

wiastek $\frac{3}{2}$, czyli $1 \frac{1}{2}$. Liczba też: $2 \frac{7}{9}$, iest
iedno co $\frac{25}{9}$, a zatym pierwiastek iey $\frac{5}{3}$,
czyli: $1 \frac{2}{3}$. Liczba to $\frac{6}{25}$, tyle znaczy co
 $\frac{256}{25}$. więc pierwiastek iey: $\frac{16}{5}$, czyli $3 \frac{1}{5}$.

O Iłościach niespołmiernych, i przybli-
żeniu Pierwiastków tych liczb, które nie
są kwadratami.

124. *Uwagi. 1.* Niech będzie liczba 2.
z której przypada wyciągać Pierwiastek
kwadratowy. Pierwiastkem tej liczby
nie będzie ani 1, ani 2; bo kwadrat z 1,
iest 1; mniej od 2, a kwadrat z 2, iest
4. więcej od 2. Więc Pierwiastek z 2,
będzie między 1. i 2, a zatym będzie zło-
żonym z iedności, i z ułamka; to iest:
będzie liczbą mieszaną, którą na sam u-
łomek obrócić można.

125. Aby ułomek ten był prawdziwym
Pierwiastkem z 2, trzebaby, aby kwadrat
iego równał się 2; a zatym aby kwadrat
licznika iego był dwa razy większy od
kwadratu mianownika. Znaleśby tedy
potrzeba taki kwadrat, któryby dwa razy
w sobie zamykał inny kwadrat; aże to iest
niepodobna, zaraz się pokaże. Każda

Każda
z tych dzie
7, 8, 9, 0.

Każdy
się nie mo
kończą nie
piero wy

I,
czyli k

Kwadr
czy son
liczby kw
iest. na: 2
A że pier
są zakońc
draty pod
1, 2, 3, 4, 5, 6
mi. Jeże
dnó zero.
dziesiątkó
kwadrat i
stów, a z
zera. K
na 5, kon
czyć się b
będzie ko
dwoiony

Każda liczba kończyć się musi na jeden z tych dziesięciu znaków: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Każdy zaś kwadrat inaczej kończyć się nie może, tylko na te znaki, na które kończą się kwadraty dziesięciu znaków dopiero wyrażonych, to jest na:

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0.

czyli krócey, na 1, 4, 9, 6, 5, 0.

Kwadraty podwojone niemogą się inaczej kończyć, tylko tak, jak się kończą liczby kwadratów ostatnie, podwojone; to jest, na: 2, 8, 8, 2, 0, 0; czyli krócey na: 2, 8, 0. A że pierwsze zakończenia na: 2, 8, nie są zakończeniami kwadratów; więc kwadraty podwojone, liczb zakończonych na: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, niemogą być kwadratami. Jeżeli liczba zakończona jest na jedno zero, to jest jeżeli jeden lub więcej dziesiątków w sobie zupełnie zamyka, kwadrat jej zamykać będzie także liczbę stów, a zatem kończyć się będzie na dwa zera. Kwadrat zaś liczby kończącej się na 5, kończy się na 25, a podwojony, kończyć się będzie na jedno tylko zero, bo będzie kończył się na 50; więc tak podwojony nie będzie kwadratem.

Nako-

Nakoniec jeżeli liczba kończy się na ieden zero, 10 razy zamykać w sobie będzie liczbę zakończoną na ieden z dziewięciu pierwszych znaków: 1,2,3,4,5,6,7,8,9; a kwadrat iey, 100 razy zamykać będzie liczbę zakończoną na: 1,4,5,6,9, kwadrat zaś ten dwa razy wzięty, zamykać będzie 100. razy liczbę zakończoną na: 2,8,0, a pierwiastek kwadratu tego dwa razy wziętego, zamykać będzie 10. razy pierwiastek liczby zekohzoney na ieden z tych trzech znaków: 2,8,0; który to ostatni pierwiastek wyciągniony byź nie może, iakośmy już okazali. Tego samego rozumowania użyć można, gdy liczba kończyć się będzie na dwa, trzy, cztery i t. d. zera.

Więc w szczegulności mówiąc, Pierwiastek kwadratowy z liczby 2, wyciągniony byź niemoże.

126. To Dowodzenie stosowane byź może do wszystkich liczb na 2. zakończonych. Y tak nie można wyciągnąć Pierwiastku kwadratowego z liczb: 12, 22, 32, 42, 52, 62, i t. d: czyli to w liczbach całkowitych, czyli w ułomkach, czyli w liczbach mieszanych.

127. Podobnie dowieść można, że nie-
pobo-

podobna z
liczby 3, a
rey się.
wodzi się
wialtku k
cych się n
ulożyć T
kich, ktor
liczbach
zupelnie

128.
wieść, że
re nie ma
liczbach ca
dą i w li
tu treść t

Jeżeli d
względem
na karcie
też będą
nieważ d
dzielników

Y tak,
ba puru/sa
fobą i ich
i 5. są mię
pierwszeń
Więc ię

podobna znaleźć pierwiastek kwadratowy liczby 3, ani żadney inney na 3. kończącey się. Tym co wyżej sposobem dowodzi się niepodobność wyciągnięcia Pierwiastku kwadratowego z liczb kończących się na 5, 7, i t. d; a z tąd możnaby ułożyć Tablicę bardzo obfzerną liczb takich, których Pierwiastki kwadratowe w liczbach ani całkowitych, ani łamanych, zupełnie wyciągnięte być niemogą.

128. Możnaby jednak i ogólnie dowieść, że wszystkie liczby całkowite, które nie mają Pierwiastku kwadratowego w liczbach całkowitych, mieć go też nie będą i w liczbach łamanych. Kładzie się tu treść tyko tego dowodu:

Jeżeli dwie liczby są *pierwszemi* jedna względem drugiego, (obacz w Arytmetyce na karcie 192.) ich kwadraty *pierwszemi* też będą jeden względem drugiego; ponieważ dzielniki kwadratów pochodzą z dzielników ich Pierwiastków.

Y tak, że liczby 2, y 3, są między sobą *pierwszemi*; *pierwszemi* są także między sobą i ich kwadraty: 4. i 9; że liczby 3. i 5. są między sobą *pierwszemi*, podobnie *pierwszemi* będą i ich kwadraty: 9. 25. Więc jeżeli dwie jakiegokolwiek liczby są *pierwsze-*

pierwszeni między sobą, ich kwadraty niebędą wielokrotne, ieden drugiego; to jest: ieden kwadrat niebędzie zupełnie w sobie zamykał drugiego.

Niech będzie liczba iaka całkowita, której nie można mieć Pierwiaſtku kwadratowego w liczbach całkowitych. Gdyby ten Pierwiaſtek można zupełnie okazać w liczbie mieszanej, ta liczba mieszana, dałaby się obrócić na sam ułomek, a ułomek ten możnaby przywieść do najprościejſzych wyrazów. Ale aby tenże ułomek wyrażał zupełny Pierwiaſtek, trzebaby, aby jego kwadrat był liczbą całkowitą, a zatem, aby licznik tego ułamka kilka razy zupełnie więkſzy był od dzielnika jego, co jest nie podobna; więc gdy liczbie iakiej całkowitej, nie można zupełnie znaleźć pierwiaſtku kwadratowego w liczbie całkowitej, nie można go też znaleźć ani w ułamku.

129. Są więc takie niektóre Ilości (*Quantitates*) które w liczbach dokładnie być wyrażone nie mogą; ani nawet wyrazić można. Jak się mała do jednoſci. Takie są te Ilości, które przez siebie same rozmnożone, czyniłyby: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, i t. d. Te ilości nazywają się *nieſpotmierzonymi* (*Incommensurabiles*, albo *Irrationales*) Piſzą się następującym ſpoſobem.

V2,

V2, V3, V
Znak ten P
naprzykład
Pierwiaſtek

130. G
razić dokł
raz, że i
w liczbac
dokładnie
zawſze m
miały mie
kwadratu
Przekara
dnego. Jak
w z 2. d
kość także
się ma do
i t. d.

131. Lo
kładnie w
można ieda
prawdziwe
le, ile zech
ſradniejszy
L. z. f. g. d.

Niech
wyrażone
przez przy

$V_2, V_3, V_5, V_6, V_7, V_8, V_{10}$. i t. d.
Znak ten V czyta się *Pierwiastek* (Radix)
na przykład: V_2 . Pierwiastek dwóch, V_3 .
Pierwiastek trzech i t. d.

130. Gdy mówię, że tych Ilości wyrazić dokładnie nie można, przydać zaraz, że ich dokładnie wyrazić niemożna w liczbach; bo w inny sposób można je dokładnie wyrazić. Na przykład: można zawsze naznaczyć dwie linie, któreby się miały między sobą, jak 1. do Pierwiastku kwadratowego liczby podanej. Y tak Przekątna kwadratu, ma się do boku jednego, jak się ma Pierwiastek kwadratowy z 2. do 1. albo jak V_2 : 1. Wyśokość także Trójkąta równobocznego, tak się ma do połowy Podstawy, jak V_3 : 1. i t. d.

131. Choć w liczbach niemożna dokładnie wyrazić Ilości nieskończonych; można jednak ich wartość przybliżyć do prawdziwej, i uchybienie zmniejszyć tyle, ile zechcemy. Sposób do tego najszybszy jest przez użycie znaków *Literskich* do wyrażenia takich Ilości.

Niech będzie podana liczba 2. aby wyciągnąć z niej Pierwiastek kwadratowy i przez przybliżenie (per approximationem.)

Gdyby

Gdyby liczba podana była razy 100, 10000, 1000000, i t. d. większa jej pierwiastek byłby też większy razy 10, 100, 1000 i t. d. tak dalece, że wyciągnąwszy pierwiastek z liczb 200, 20000, 2000000. i t. d. trzeba by pierwiastek ten dzielić przez 10, 100, 1000, y t. d. aby w nim upiknąć omyłki w częściach dziesiątych, setnych, tyśiącznych i t. d. Przeto Pierwiastek kwadratowy, wyciągnięty z 2, aż do cząstek tyśiącznych, znawdzie się wyciągać go z liczby: 2000000.

Pierwiastek naybliższy z liczby 2000000 wyciągnięty jest: 1414. a pierwiastek z liczby 2, przybliżony aż do $\frac{1}{1000}$ jest, 1, 414. Ponieważ kwadrat z 1, 414 jest 1,999396, i różni się od 2, tylko 0,000604.

Wzór działania.

$$\begin{array}{r}
 2,00,00,00 \mid 1,414 \\
 \hline
 24 \mid 10,0 \\
 \quad 96 \\
 \hline
 281 \mid 40,0 \\
 \quad 281 \\
 \hline
 2824 \mid 1190,0 \\
 \quad 11296 \\
 \hline
 \quad \quad 604
 \end{array}$$

Gdyby-

Gdybyśmy chcieli jeszcze bardziej przybliżyć do prawdziwego, ten pierwiastek, na przykład żeby ani w części $\frac{1}{10000}$, nie było uchybienia, trzeba by jeszcze odważyć przyjąć, aby mieć jednym znakiem więcej w pierwiastku.

132. Dla sprawdzenia, czyliśmy wzięli $\frac{1}{1000}$, nieuchylił, można położyć zamiast pierwiastku znalezionej 1,414: liczbę 1,415, a ta przez siebie rozmnożona uczyni kwadrat: 2,002225, większy od 2.

133. Częstokroć bardzo wygodnie i prędko wyciągać można z liczby pierwiastek przybliżony, w ułamkach zwykłych. Sposób ten zasada się na tym, że jeżeli liczba jest złożona z dwóch części, z których jedna jest bardzo wielka względem drugiej; kwadrat tej liczby będzie prawie złożony z kwadratu części większej, i z podwojonego rozmnożenia części pierwszej przez drugą; ponieważ kwadrat części mniejszej, jako bardzo mały, może być zaniedbany. Y tak kwadrat liczby na przykład 11, podzielonej na dwie części: 10, i 1, będzie równy 100, to jest kwadratowi z 10, przy-

dawszy 10. przez 2 rozmnożone, to jest, 20, i kwadrat części mniejszey: 1; A choćby ten ostatni kwadrat i opuścić, tedy iednak Summa 120, małoby się różniła od kwadratu prawdziwego 121.

134. Idzie z tąd, że mając liczbę, z której przypada wyciągać Pierwiaſtek złożony z dwóch części, z których iedna byłaby wielka, a druga mała, ieżeli wiemy już tę część wielką, znajdziemy z niewielkim uchybieniem i część małą, podzieliwszy różnicę między liczbą podaną, i kwadratem części wielkiej, przez tę samę część wielką dwa razy wziętą. To, co na wieloraz wypadnie, trzeba przydać do wielkiej części, gdy liczba podana będzie większa od kwadratu części wielkiej; albo odjąć od części wielkiej, gdy kwadrat iey większy będzie od liczby podanej.

Niech będzie podana do wyciągnięcia Pierwiaſtku, liczba 5. Pierwiaſtek iey najbliższy w liczbie całkowitey, jest 2. którego kwadrat 4. Różnica między tym kwadratem i 5, jest: 1. Podzielmy tę różnicę 1. przez 2, dwa razy wzięte, to jest przez 4, i będzie $\frac{1}{4}$. A zatyń Pierwiaſtek liczby 5. nie wiele uchybiony, będzie

dzie

dzie 2,

czyli $5\frac{1}{4}$

razy wz

na wielo

czyli od

ten będą

się do

towy li

$\frac{25021}{5184}$ czy

5184

135. C

z tym, k

siątnych:

na ułom

2.236r. i

w ułomk

t. d. A z

jakim po

w części

136. V

dziesięt

ze wzię

dzie $2, \frac{1}{4}$ albo $\frac{9}{4}$. Kwadrat z $\frac{9}{4}$ jest $\frac{81}{16}$.
czyli $5 \frac{1}{16}$. Podzielimy $\frac{1}{16}$ przez $\frac{9}{4}$ dwa
razy wzięte, to jest przez $\frac{9}{2}$ wypadnie
na wieloraz $\frac{1}{72}$ który odiały od $\frac{9}{4}$
czyli od $2, \frac{1}{4}$ zostanie $2 \frac{17}{72}$ albo $\frac{161}{72}$, y
ten będzie jeszcze bardziej przybliżający
się do prawdziwego pierwiastek kwadra-
towy liczby 5. Jakoż kwadrat z $\frac{161}{72}$ jest:
 $\frac{25921}{5184}$ czyli $5 \frac{1}{5184}$.

135. Chcąc porównać to przybliżenie
z tym, któreśmy mieli w ułamkach dzie-
śatnych; obróćmy ułamek zwyczajny $\frac{161}{72}$
na ułamek dziesiętny, a znajdziemy:
2,2361 i t. d. Pierwiastek zaś liczby 5,
w ułamku dziesiętnym byłby 2,2360. i
t. d. A zatem różnica liczb w tym dwo-
jakim postępowaniu, wydalaby się dopiero
w częściach dziesięć tysięcznych.

136. W pierwszym postępowaniu, kła-
dziecie zamiast liczby podanej, ułamek
ze wszystkim iey równy, którego dziel-

nik jest kwadratem z 10, z 100, z 1000.
i t. d. Na przykład zamiast 2, pisze się
 $\frac{200}{100}$, $\frac{20000}{10000}$, $\frac{2000000}{1000000}$. W drugim postępo-

waniu, izostamy ulomka bardzo blisko rów-
nego 2, z 10000. Którego tak licznik,
jako i mianownik, byłby zupełnym
kwadratem. Y tak liczba 2, jest prawie

równa ulomkom: $\frac{9}{4}$, $\frac{49}{25}$, $\frac{100}{49}$, $\frac{289}{144}$ i t. d.

Liczba 3, jest prawie równa ulomkom:
 $\frac{49}{16}$, $\frac{361}{121}$ i t. d. Znajdujemy zaś te ulom-

ki, dwojąc, trojąc i t. d. kwadraty liczb
naturalnych: 2, 3, 4, 5, i t. d. i uważając,
jeżeli między liczbami kwadratowymi nie
będzie która tuż zbliżająca się do liczby
podwojonej potrojonej, i t. d. którąśmy
już znaleźli. Na przykład: 2 razy 4, czyni
8, a blisko czyni kwadrat 9, więc 2, zu-
pełnie równa się $\frac{8}{4}$, a niedaleko jest od

$\frac{9}{4}$, a zatem Pierwiaszek z 2, będzie blisko

$\frac{3}{2}$. Podobnie 2 razy 25, czyni 50, więc 2,
równa się $\frac{50}{25}$, a niedaleko jest od $\frac{49}{25}$: a za-

tem Pierwiaszek z 2, będzie blisko: $\frac{7}{5}$. Mo-
żna potym potrawić, gdy zechcemy pier-
wsze te przybliżenia, pogrupować sobie tak,
jak się wyjdzie, powiedziasto.

Do-

Dofy-
tkowey
nia Pierw-
ta stała
slawni M-
głębiey
przytło-

137.
trzecia
Zamiast
wiattek
tym Pier-
stek mi-
łomek re-
mianowu-
łomek re-
ciagnym
cia czu-
wiattek
trzecia re-
o. 1165.
o. 6566
o. 65666

(m) O-
tuż
rum
G-
ku te

Dostyć będzie tym czasem natey początkowej wiadomości względem przybliżania Pierwiastków nie społmernihych. Rzecz ta stała się materią wielkiej wagi, gdy sławni Matematycy Euler i de la Grange, głębiej ją bród poczęli, i rozmaite iey przytóżowania czynić. (m)

137. Niech będzie ułomek $\frac{2}{3}$, z którego trzecią wyciągnąć Pierwiastek kwadratowy. Zamiast, co byśmy mieli o obno ten Pierwiastek wyciągnąć z 2, i z 3, i dzielić potym Pierwiastek Licznika przez pierwiastek mianownika, wygodniej będzie, ułomek ten $\frac{2}{3}$, odmienić na inny, gdzieby mianownik, był zupełnym kwadratem. Ułomek tedy tak odmieniony będzie $\frac{2}{9}$. Wyciągniemy pierwiastek z licznika 2, a trzecią część tego Pierwiastku, będzie pierwiastkiem ułamka $\frac{2}{9}$. $\sqrt{2} = 1,4142$; trzecia tego pierwiastku część jest prawie 0,4714. Iakoż kwadrat 20,8165, będzie: 0,6666-225; i nie wiele różni się od $\frac{2}{3} = 0,66666666$, i t. d.

(m) *Obacz między innymi Dzielę pod Tytułem: Introduction à l'analyse infinie par Euler; i przydatki de la Grange do Algèbre Eulera po Francuzku wydane.*

138. Można by też wyciągnąć pierwiastek z $\frac{2}{3}$, przez ułamki zwyczajne. Kwadrat najbliższy ułamka $\frac{2}{3}$, jest 1, który różni się od $\frac{2}{3}$ przez $\frac{1}{3}$. Dzielną, przez kwadrat 1, podwojony to jest przez 2, tę różnicę $\frac{1}{3}$, i będzie $\frac{2}{6}$, a odjąwszy $\frac{1}{6}$, od 1, albo od $\frac{6}{6}$, zostanie $\frac{5}{6}$, kwadrat z $\frac{5}{6}$, jest $\frac{25}{36}$, który od $\frac{2}{3}$ różni się przez $\frac{1}{36}$. Tę różnicę $\frac{1}{36}$, podzieloną przez dwa razy $\frac{5}{6}$, czyli przez $\frac{5}{3}$, to jest $\frac{1}{60}$, odeymuię od $\frac{5}{6}$, zostanie $\frac{49}{60}$. Y ten ułomek $\frac{49}{60}$, będzie pierwiastkiem bardzo bliskim z $\frac{2}{3}$, ponieważ kwadrat z $\frac{49}{60}$ jest $\frac{2401}{3600}$, a ułomek: $\frac{2}{3}$ znaczy tyle, co $\frac{2400}{3600}$; różnica więc będzie tylko w $\frac{1}{3600}$.

139. W ogólności mówiąc; aby Pierwiastek kwadratowy wyciągnąć z ułamka jakiego; trzeba pierwey tak zrobić, aby mianownik jego był kwadratem, mnożąc, gdy inaczej być nie może licznika i mianownika przez mianownika, i wyciągać potym pierwiastek z licznika tak rozmno-

żonego,

żonego, a przez mianownika nie rozmnożonego podzielić ten pierwiastek.

140. Może się jednak obejść czasem bez mnożenia tak licznika, iako i mianownika, przez tegoż samego mianownika; gdy mianownik już jest kwadratem, albo gdy takim można go uczynić, mnożąc przez mniejszą iaką od mianownika liczbę, tak licznika, iako i mianownika. Naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiastek z $\frac{5}{3}$; wyciągniemy go z 3. i podzielimy przez 2; chcąc mieć pierwiastek z $\frac{5}{12}$, rozmnożemy 5, i 12, przez 3, a mając ztąd $\frac{15}{36}$; wyciągniemy pierwiastek z 15, i podzielimy przez 6. pierwiastek z 15, będzie prawie 4, odtrąciwszy 1, to jest będzie $\frac{31}{8}$. więc pierwiastek z $\frac{5}{12}$, będzie: $\frac{31}{48}$; kwadrat albowiem z $\frac{31}{48}$ jest: $\frac{961}{2304}$. a $\frac{5}{12}$, tyle znaczy co $\frac{960}{2304}$; a zatym uchybiecie jest tylko w $\frac{1}{2304}$.

RO-

ROZDZIAŁ VI.

O dodawaniu i odejmowaniu Kwadratów, i zamienianiu ich na jakukolwiek Figury prostopiętne.

141. *Defin:* W trójkątach prostokątnym, bok przeciwny prostemu kątowi, nazywać będziemy: *Liniją Przeciwprostokątną* albo jednym słowem: *Przeciwprostokątną* (*Hypotenusa*.)

142. *Twierdz:* 1. Kwadrat zrobiony na przeciwprostokątnej Trójkąta prostokątnego, równa się summie kwadratów z, dwóch innych boków tegoż trójkąta.

Prawdę Twierdzenia tego okazać najprzód potrzeba na Trójkącie Prostokątnym równo ramiennym, to jest mającym dwa boki równe; dowodząc: że kwadrat zrobiony na Przeciekątnej kwadratu dwa razy jest od tegoż kwadratu większy.

*Tab.
VIII.
Fig. 2.*

Niech będzie: ABCD, kwadrat, którego Przeciekątna AC. Przeciagniemy AB, do E, a CB, do F, tak, aby BE. i BF, równe były AB. Poprowadźmy Linie: AF, CE, EF. Czworokąt ACEF, będzie kwadratem przekątnej AC, i będzie dwa razy większy od kwadratu ABCD.

Jakoż.

Jakoż
EB. mo
wzrostł
miał rów
AF. będą
tego ką
ty, bo z
fitych, i
jest z ka
Czworol
cym bo
kwadrat
dług z cz
żdy przy
Trójkąt
kich Tró
ACEF, i
kwadrat
zy więk
bokiem i

143. A
ty równe
kątny rów
kącie pro
dnego z
prostokąt
kwadrata
tych kwa

Można
dowodze

Jakoż cztery Troykaty: ABC, ABF, EBC, EBF. mogą Przytłać do siebie; bo mała wszystkie kąty przy B. proste. i boki przy nich równe; a zatym linie AC, CE, EF, AF, będą wszystkie równe. Każdy oprócz tego kąt w czworokącie ACEF, jest prosty, bo złożony z dwóch kątów pół prostych, iak na przykład kąt ACF, złożony jest z kątów półprostych BCA, BCE; więc Czworokąt ACEF jest prostokątem mającym boki wszystkie równe, a przeto jest kwadratem. Ten kwadrat ACEF. składa się z czterech Troykatów, z których każdy przytłać może do jednego z dwóch Troykatów kwadratu ABCD. Ze tedy takich Troykatów jest cztery w kwadracie ACEF, iakich jest dwa w kwadracie ABCD; kwadrat więc Przykątney AC, jest dwa razy większy od kwadratu tego, którego bokiem jest ta Przekątna.

143. *Wniosek:* Aby dodać dwa kwadraty równe, trzeba złożyć Troykat prostokątny równoramienny, którego boki przy kącie prostym byłyby równe, bokami jednego z dwóch kwadratów, a Przeciwprostokątna tego Troykąt, będzie bokiem kwadratu równego sumie dwóch tamtych kwadratów.

Można jeszcze. nim się do ogólnego dowodzenia przytłaci, przytoczyć niektóre

Fig. 3. które przypadki szczególne, gdzie trzy boki Trójkąta prostokątnego będą w liczbach wyrażone. Obacz na figurze 3. gdzie trzy boki Trójkąta prostokątnego, wyrażone przez liczby: 5, 4, 3, w częściach równych, na przykład w calach; kwadraty tych liczb są, 25, 16, 9, calów kwadratowych; i pierwszy kwadrat równa się summie dwóch ostatnich.

INNE PRZTKŁADY

Przeciwprostokątne	Boki.
13, - - -	12 - 5
17, - - -	15 - 8
25, - - -	24 - 7.

Dowodzenie ogólne, które teraz damy, można objaśnić na kwadratach z karty grubey wyrzniętych.

Fig. 4. Niech będą dwa jakiekolwiek kwadraty: ABCD. i A'EFG; znajdziemy kwadrat równy ich summie w ten sposób. Postawmy najprzód te kwadraty, ieden przy drugim tak, aby dwa ich boki AD. i AG, stykały się, i iedną linią czyniły DG. Bok AG mniejszego kwadratu, przeniesmy potym na bok AD. większego kwadratu od D, do J. Poprowadźmy linie IF, IC. Trójkąty prostokątne IGF, CID. mają boki przyległe

katowi
rów oby
kwadrat
IC. rów
GF, albo
wzdłuż
kata ID
EC. bok
boku A
fą kąt
IC. w
Trójk
Podobn
IC, prz
bie rów
AD. AD
HE; bo
bok EF
dzie w
towi F
z cztere
IF, FH.
prost.
summie
czynią
i IEG.
i prost
równ.
kwadra
dratow
Przek
iącego

katowi prostemu równe bokom kwadratów ebydwóch. Trzeba więc dowieść, że kwadrat przeciw prostopadłej IF, albo IC, równy jest summie kwadratów z GI. i GF, albo z DC. i DI. Wyróżnawszy kątek wzdłuż linii IF. i IC, przyłożmy, Trójkąt IDC. Bok DC. na jego równym boku BC. bok DI. przypadnie na BH. przedłużeniu boku AB; a to z tej przyczyny, że obadwa kąty proste D. i B: bok zatym trzeci IC. weźmie położenie HC: będzie więc Trójkąt CEH, równy Trójkątowi CDI. Podobnie i drugiego Trójkąta IGF, bok IG, przypadnie zupełnie do boku IF, sobie równego, ponieważ IG. równa się AD. AD, równa się AB, a AB. równa się HE; bok GF. przypadnie na równy sobie bok EF: a IF, weźmie położenie HF, będzie więc Trójkąt FEH, równy Trójkątowi FGI. Czworokąt, który się zrobi z czterech przeciwprostokątnych: CI, IF, FH, HC, będzie miał wszystkie kąty proste, bo kąt na przykład IFH, równa się summie kątów IFE. i EHF, które równie czynią kąt prosty, jak czynią kąt IFE i IFG. Ten więc czworokąt jest razem i prostokątem mającym wszystkie boki równe, a zatym jest kwadratem: i każdy to kwadrat równa się summie dwóch kwadratów podanych, a zrobiony jest na Przekątnej Trójkąta prostokątnego, mającego za boki przyległe katowi prostemu

mu te same, które były bokami tychże kwadratów.

Dowodzenie następujące powinno tym iśniej być wyłożone, im prościej iś-
szcze od pierwsz-go tę prawdę okazuje;
i więcej daie do czynienia dowcipowi.
Wiele także użytecznych wniosków z
niego wypływa.

Tab. IX. Niech będzie Troyką ABC. prostoką-
Fig. 1. tny przy C. Na trzech bokach iego: AB,
AC, BC, wystawmy trzy kwadraty: ABDE,
ACFG, BCHI. Kwadrat ABDE. równy
będzie summie dwóch innych: ACFG. i
BCHI.

Z wierzchołku kąta prostego spuśćmy
na przeciwprostokątną AB; prostopadłą
CL, i przeciągniemy ją aż do boku ED,
do M.

Pokazać teraz trzeba, że kwadrat BCHI
równy jest Prostokątowi BDML, a kwa-
drat ACFG, Prostokątowi AEML, a zarym
obadwa razem kwadraty równe kwadra-
towi ABDE.

Pociągniemy linią CD; Troyką BDC.
będzie połową Równoległoboku prosto-
kątnego BDML; bo obadwa mają spólną

pod-

podstawę BD, i na teyże samey równood-
ległej AC, są zakończone. (94.)

Pociągniemy linię AI; Trójkąt BIA,
będzie podobną kwadratu BCHI, dla teyże,
co wyżej przyczyły; bo obadwa także
mają podstawę wspólną BI, i obadwa na te-
dnej równoodległej AI, są zakończone.

Jeżeli tedy dowiedziemy, że Trójkąty:
ABI, CFD, są równe: już tym samym Pro-
stokąt IHFL, równy będzie kwadratowi
BCHI; to kiedy połowy dwóch rzeczy są
równe, to i same te rzeczy będą równe.

Te dwa Trójkąty mogą przysłać do
siebie: ponieważ bok AB, w jednym, rów-
ny jest bokowi DI, w drugim, bo oba
dwa te boki do jednego kwadratu należą;
bok BI, w jednym, równy także jest bo-
kowi EC, w drugim: laty między temi
bokami zawarte: AFL, CBD, składają się
obadwa z kąta prostego i z kąta ABC;
więc te dwa Trójkąty są równe w ro-
wierzchniach; a zatem i kwadrat BCHI,
równy będzie Prostokątowi FDL. Tym-
że samym sposobem dowodzi się, że kwa-
drat ACFG, równy jest Prostokątowi
AFML: to jest pociągnawszy linię CE.
EG, Trójkąty BAG, EAC, mogą przysłać
do siebie, a zatem będą równe; kwadrat
więc

wiec ACFG, że jest dwa razy większy od Trójkąta EAG, będzie równy Prostokątowi AFML, dwa razy także większe-
mu od Trójkąta EAC. (n)

144. *Wniosek.* Gdy od wierzchołka kąta prostego, w Trójkącie prostokątnym spuszczone będzie Prostopadła na przeciwprostokątną, kwadrat z boku jednego tego Trójkąta równy będzie Prostokątowi zbudowanemu z przeciwprostokątnej, i z odcinka uczynionego przez Prostopadłą, a
przy

(n) Sposób postępowania w tym dowodzeniu, może służyć za wzór do innych dowodzeń przydatnych i z wielu złożonych. Podzieliliśmy go na części, z każdą osobnośmy się obejźli. W tych samych częściach były znowu uczynione nowe podziały, niezawisłe od drugich, i każdy podział w szczególności dowodzony. Linie nie były razem prowadzone, ale w tedy dotiero, gdy były potrzebne. Ta ostatnia uwaga powinna być między innymi na pamięci w dowodzeniu Twierdzeń złożonych, gdzie gdyby wiele razem linij prowadziło się na Figurze, nie małą trudność zadałoby to Uczeń om niedobrze jeszcze w takowe działania wprowadzonym.

przyległ
którego k
kład kwad
równy jest
kątnej AF
jest Prost
pokazało.
boku BC,
stokątowi
BD, i z
wi BDM

145 Z
draty, zro
alto ich

1. Zro
nami były
nych. Po
ta będzie
nie tamy

2. Zro
jedno ran
Od końca
wym ko
kreslmy l
mę ciąg
nazwały
nia, zko
drat; ten
kwadrato

przyległego temuż Trójkąta bokowi, którego kwadrat licze się. Tak na przykład kwadrat boku AC, to jest ACFG, równy jest Prostokątowi z Przeciwpromienną AB, albo AE, i z odcinku AL: to jest Prostokątowi AEML, iako się wyżej pokazało. Podobnie i kwadrat drugiego boku BC, to jest BCHI, równy jest Prostokątowi z Przeciwpromienną AB, albo BD, i z odcinka BL, to jest Prostokątowi BDML.

145 *Zadanie*: 1. Mając dane dwa kwadraty, zrobić kwadrat równy ich sumie, albo ich różnicy.

1. Zrobmy kąt prosty, którego ramionami byłyby boki dwóch kwadratów danych. Pociągnąwszy przeciwprostokątną, ta będzie bokiem kwadratu równego sumie ramion tych dwóch kwadratów.

2. Zrobmy kąt prosty, dawszy mu za jedno ramie bok mniejszego kwadratu. Od końca tego ramienia, promieniem równym bokowi większego kwadratu, nakreślmy łuk koła, któryby przecinał ramie drugie kąta prostego. To przecięcie oznaczy długość tego drugiego ramienia, z którego wyprowadziwszy kwadrat; ten będzie równy różnicy dwóch kwadratów danych.

Gdyby

Gdyby kwadraty dane były równe;
rozwiązanie byłoby jeszcze łatwiejsze.

Przystosowanie zagadnienia, poprzedzającego, do wynalezienia innych Kwadratów.

146. Jużśmy pokazali, że kwadrat Przekątney jest dwa razy większy od kwadratu, którego jest ta Przekątna. Aby zrobić kwadrat równy summie trzech kwadratów równych, czyli aby potroić taki kwadrat; znaleźliśmy najprzód kwadrat podwojny, moźraby mu przydać znowu kwadrat pojedynczy, ale też można i jeszcze lepiej tak sobie postąpić: Kwadrat potrojny jest różnicą kwadratu poczwornego, od kwadratu pojedynczego. Zróbmyż więc Trójkąt prostokątny, którego bokiem iedrym byłby bok kwadratu danego. a Przeciwpromienną dajmy mu dwa razy większą od tego boku; bok drugi, który przypadnie w tymże Trójkącie będzie taki. iściego nam potrzeba, abyśmy mieli kwadrat potrojny.

147. Uwaga. Trójkąt Prostokątny, którego Przeciwpromienną jest dwa razy tak wielka, iak jest wielkie ramie iedno kąta prostego; ten, mowię, Trójkąt dwa razy jest mniejszy od Trójkąta równoboczne-

boczne-
łoby ramie
byłoby w
potrzebie i
fawie dw
kwadratu
a wyśoko
kość bok
kwadrat

148.
kwadrat
tylko k

149. A
Maz od p
fym post
re bok
dwa razy
tna iedn
większe

150. A
większy
do siebie
ry: a bo
poprowa
Przekąt
bok Tró
wyśoko-
razy wie

Łocznego, którego połowa podstawy byłoby ramie iedno kąta prostego, a drugie byłoby wysokością tego: a zatym, aby potroić taki kwadrat, cożyć jest na podstawie dwa razy większy od boku tego kwadratu zrobić Trójkąt Równoboczny, a wysokość tego Trójkąta okaże wielkość boku, na którym wystawić mamy kwadrat potrójny.

148. Aby zrobić cztery razy większy kwadrat od tego, który jest dany; trzeba tylko kwadratu danego bok podwoić.

149. Aby zrobić kwadrat pięć razy większy od podanego, trzeba przy kącie prostym postawić dwa ramiona; iedno równe bokowi kwadratu danego, drugie dwa razy tak wielkie, a przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu pięć razy większego.

150. Aby zrobić kwadrat sześć razy większy od podanego, trzeba albo dodać do siebie kwadrat poczworny i podwoyny; albo też kwadrat podwoyny potroić, poprowadziwszy w danym kwadracie Przekątną, i tę podwoioną, wziąwszy za bok Trójkąta równobocznego, którego wysokość oznaczy bok kwadratu sześć razy większego.

151. Aby zrobić kwadrat siedm razy większy od danego, trzeba dodać kwadrat poczworny i potrójny, dawszy ką prosty między bokami tych dwóch kwadratów; a na przeciwprostokątnej kwadrat postawiwszy; ten będzie siedm razy większy od danego.

152. Aby zrobić kwadrat ośm razy większy od podanego, trzeba go albo podwoić, i podwoiony cztery razy pomnożyć, dawszy mu bok dwa razy większy od boku kwadratu podanego; albo też zrobić kwadrat równy Różnicy między kwadratem danym, i kwadratem dziewięć razy większym od niego; postawiwszy na ten koniec Trójkąt prostokątny, któremu za ramię jedno przy kącie prostym damy bok kwadratu podanego, a za przeciwprostokątną, linią trzy razy od tego boku większą. Ramię drugie, które przypadnie w tym Trójkącie, oznaczy bok kwadratu ośm razy większego od danego.

153. Aby zrobić kwadrat dziewięć razy większy od podanego, trzeba mu dać bok, trzy razy od podanego większy.

154. Aby zrobić kwadrat dziesięć razy większy od podanego; trzeba wziąć sum-

me

me kwadr
raz

155. Al
razy wię
sumę kw
razy tak

156. Al
większy
bok kw
ku potro

157.
razy wię
sumę k
więc razy
dany; al
stokątny
razy, a d
kwadratu
oznaczy
większego

158. W
dziesięć
przy kącie
towi i z
ramionow
go; ten
guliniey

me kwadratów: podanego, i dziewięć razy większego.

155. Aby zrobić kwadrat jedenaście razy większy od podanego, trzeba wziąć sumę kwadratów: dwa razy, i dziewięć razy tak wielkiego, jak jest podany.

156. Aby zrobić kwadrat dwanaście razy większy od podanego, trzeba podwoić bok kwadratu podanego, i natym boku potroynym kwadrat postawić.

157. Aby zrobić kwadrat trzynaście razy większy od podanego; trzeba wziąć sumę kwadratu poczwornego, i dziewięć razy większego niż jest kwadrat podany; albo też postawić Trojkat prostokątny i dać dwa ramiona. Jedno trzy razy, a drugie dwa razy większe od boku kwadratu podanego: przeciwprostokątna oznaczy bok kwadratu trzynaście razy większego od podanego i t. d.

158. Wniosek z zagadnienia poprzedzającego; że kwadrat ramienia jednego przy kącie prostym, równy jest Prostokątowi i z odcinka-iej przyległego ramionowi, przez prostokątą zrobionego; ten mówię wniosek dać sposób ogólniejszy, a czatem i prostszy rozwią-

zania zagadnień w przyróżosowaniu poło-
żonych.

Jakoż ieżeli przeciwprostokątna iest dwa,
trzy, cztery i t. d. razy tak wielka, iak od-
cinek przyległy iednemu bokowi; prostokąt
z tey przeciwprostokątney i z tego od-
cinka, będzie też dwa, trzy, cztery i t. d. razy
tak wielki, iak kwadrat tego samego od-
cinka; a zatym i kwadrat boku przyle-
głego temu odcinkowi będzie też dwa,
trzy, cztery i t. d. razy tak wielki, iak
kwadrat tego odcinka, co iasno być po-
winno, mając w pamięci to, co się powie-
dzało w Arytmetyce nakarcie 88, i nastę-
pujących o mierzeniu Prostokątów, a co
tu nie zawadzi powtórzyć.

159. *Podanie przybrane (Lemma). (o)*
Gdy od punktu któregokolwiek na okrę-
gu koła, poprowadzone będą dwie linie
do dwóch końców średnicy; kąt przy tym
punkcie zrobiony, i zawarty między dwie-
ma temi liniami będzie prosty.

Niech

(o) *Lemma nazywamy podaniem przybra-
nym, że nie należy właściwie do tey
rzeczy, o której mowa, i że się przybie-
ra czasem z inney części Matematyki dla
przyróżobienia nas do łatwiejszego
zrozumienia tego, co następuje.*

Niech
AB, iest
punkt 13
koła, i po
AK, BK,
biony pr

Przy
CK.

Dow
ramienn
kąty A.
iace bę
cie CK
przy K.
B; a pon
mi, czy
przez się

160.
by kilka
sobie kw
Niech
AB, iest
ma wio
Na AC.
le. Od p
dla DD,
Lwa A
towi 23

161.

Niech będzie AKB. półkole, którego AB, jest średnią. Weźmy jakikolwiek punkt na przykład K, na okręgu tego półkola, i poprowadźmy od tego punktu linie AK, BK, do końców średnicy. Kąt zrobiony przez te dwie linie jest prosty.

Przygotowanie. Pociągniemy promień CK.

Dowód. Trójkąt AKC, jest równoramienny, bo AC, równa się CK; więc i kąty A, i CKA, naprzeciw tym bokom stojące będą równe; toż samo i o Trójkącie CKB; a zatem w Trójkącie AKB, kąt przy K, będzie równy sumie kątów A i B; a ponieważ razem z temi dwoma kątami, czyni dwa kąty proste, więc sam przez się będzie czyli kąt jeden prosty.

160. *Zagadka.* 2. Znaleźć kwadrat, który by kilka razy, lub więcej zamykał w sobie kwadrat dany.

Niech AC, zamyka tyle razy w sobie AB, ile razy kwadrat którego szukamy, ma w sobie zamykać ten, który jest dany. Na AC, jako na średnicy, narysujemy półkole. Od punktu B, wyprowadźmy prostopadłą BD, przecinając półkole w punkcie K. Linia AK, będzie służyła za bok kwadratowi żądanemu.

Fig. 3.

161. *Uwaga.* Trzeba tu pokazać widocznie

nie Uczniom pożyteczność większą i ogólniejszą Geometrii, niżeli Arytmetyki; ponieważ w Arytmetyce nie można zupełnie wyodrębnić Pierwiastku kwadratowego z liczb innych, które są podwojne, potrójne, poszostne it. d. innych liczb kwadratowych. I tak nie można nawet w ułamkach znaleźć Pierwiastku kwadratowego liczb 2, 3, 5, 6, it. d; a w Geometrii, iako się pokazało, znajdujemy i wyznaczamy boki kwadratów podwójnych, potrójnych, poszostnych it. d.

Można więc powiedzieć, że niepodobność w wyznaczeniu pierwszych ilości, których kwadraty byłyby podwójne, potrójne, it. d. innych kwadratów, nie jest w sobie, ale pochodzi tylko od sposobu, którego używamy.

162. *Zagadn.* 3. Mając dany Prostokąt, zamienić go na kwadrat iemu równy.

Rozwiąz. Na większy bok Prostokąta, przenieśmy długość boku iego mniejszego, tak, aby koniec jeden tego boku mniejszego schodził się z końcem jednym boku większego. Na tymże boku większym, iako na średnicy narysujemy półkole, a do końca drugiego boku mniejszego niechodzącego się z końcem drugim

gim boku
i spadł
Prostokąt
Eni do t
dzi się z
Tachian
równego

164.
le V. i
zna zan
kazało.
nie na k
stosunku
niona.

W Tr
twarzy
mu lato
erów d
zas byłby
towi c
cwóch in
bacie.

Dwa
Różnicę
boku tak
mu, iako
i kwadra

gim boku większego wyprowadźmy Prostopadłą, i od punktu przecięcia teyże Prostopadłej z połkołem, poprowadźmy linią do tego końca średnicy, który schodzi się z bokiem najmniejszym Prostopłata. Ta ośmia linia będzie bokiem kwadratu równego Prostopłatowi.

164. *Wniosek.* Wiedzieliśmy w Rozdziale V. że każda prostokreślna można zamieścić na Prostopłacie. Teraz się okazało, jak można Prostopłata każdy zamieścić na kwadracie: więc każda Figura Prostopłata, może być i na kwadracie zamieszczona.

W Troykącie mającym kąt jeden rozwarty, kwadrat boku przeciwnego temu kątowi, większy jest od summy kwadratów dwóch innych boków; najmniejszy zaś byłby kwadrat boku przeciwnego kątowi ostremu od summy kwadratów dwóch innych boków w jedynymże Troykącie.

Dwa następujące Twierdzenia, pokażą Różnicę w Troykącie między kwadratem boku tak przeciwnego kątowi rozwartemu, jako i przeciwnego kątowi ostremu, i kwadratowi dwóch innych boków.

165. *Twierdż. 2.* W Troykacie mającym kąt rozwartym, spuściwszy prostopadłą od iednego końca boku przeciwnego kątowi: rozwartemu, na inny bok którykolwiek; kwadrat tamtego boku, będzie równy summie kwadratów dwóch innych boków, i dwa razy wziętemu Prostopłakowi z boku, na który prostopadła spuszczoła. rozmnożonego przez odległość od teyże Prostopadley, wierzchołka kąta rozwartego.

Niech będzie Troyką: ABC, który ma kąt rozwartym przy C. Od końca A, boku AB, przeciwnego temu kątowi. spuścimy na BC, prostopadłą AD. Kwadrat z AB, równy będzie summie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętemu Prostopłakowi z BC, przez CD.

Przygotowanie. Na linii BD. zrobmy kwadrat BDEF, i na dwóch bokach jego weźmy FG, i FL, równe BC; poprowadźmy przez G, i L, linie GL. i LC.

Dowodz. Prostopłak FGKL, jest kwadratem z BC; Prostopłak CDLK, jest kwadratem z CD; a Prostopłak obydwa BCKG. i EIKL, są z BC, przez CD.

Kwadrat z AB, równa się summie kwadratów

dratów z
dratów z
wziętemu
A że sum
na jest k
z AB, r
AC, i z
kątowni

166.
był pol
to jest
CD. Pr
wzięty
przez C
iego pol
ny moż
cych
tamtę
rozciąg
ciwnego
summie
ków, i

167.
wiek u
ca boku
ściwszy
kwadrat
różnicy
obydw

dratów z AD, i z BD; to jest summie kwadratów z AD, z DC, i z BC, i dwa razy wziętemu Prostokątowi z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i DC, równa jest kwadratowi z AC, więc kwadrat z AB, równy jest summie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętemu Prostokątowi z BC, przez CD.

166. *Przykład.* Niechby Trojkąt ACD był połową, Trojkąta równobocznego; to jest niechby linia AC była połową linii CD. Prostokąt z BC, przez CD, dwa razy wzięty, byłby równy Prostokątowi BC, przez CA; a i sam przez się byłby tylko jego połową. Ten przypadek szczególny można wyrazić w słowach następujących „*W Trojkącie, którego kąt rozwartu równa się summie kąta prostego i trzeciej części jego*: kwadrat boku przeciwnego kątowi rozwartemu, równy jest summie kwadratów innych dwóch boków, i Prostokątowi z tychże boków.

167. *Twierdź:* 3. W trojkącie jakiegokolwiek uważać jeden kąt ostry, a od końca boku przeciwnego temu kątowi spuścić prostopadłą na jedno ramie jego; kwadrat tego boku równać się będzie różnicy między summą kwadratów ramion obojdwóch kąta tego ostrego, dwa razy

wziętym Prostopokątem z ramienia, na które prostopadła jest spuszczona, i z odległości wierzchołka kąta ostrego od prostopadłej.

Fig. 5. Niech będzie Troyką ABC, w którym kąt C jest ostry. Od końca A, boku przeciwnego AB, spuśćmy Prostopadłą AD, na ramię BC, kąta ostrego. Kwadrat z AB równy będzie różnicy między sumą kwadratów z AC, i z CB, i dwa razy wziętym Prostopokątem którego bokami będą BC, i CD.

Przygotowanie. Zróbmy kwadrat z CB, BCEF. Naznaczmy Linie FG, FL, równe A B; i CL równą CD. Poprowadźmy jeszcze linie: DL, IG. Przeciagniemy DL i CE do M i N, tak, aby LM, EN równe były CD. Złączmy ich końce linią MN. Prostopokąt ELMN, równy będzie kwadratu z CD.

Dowodz: Kwadrat z AB równy jest sumie kwadratów z AD, i z BD. Kwadrat z BD, to jest FGHL, równy jest kwadratowi BCEF, z BC, mniej sumą dwóch prostopokątów: BGIC, i EIKL; albo dodawaj, i odiawaj kwadrat ELMN, z CD; kwadrat z BD będzie równy sumie kwadratów: BCEF, i ELMN, mniej sumą Pro-

Profiokątów BGIC, FIHL, i kwadratu ELKLN, czyli mnięj summa Profiokątów BGIC, i IKMN: które obadwa są Profiokątami z boków BC, i CD: a zatym kwadrat z AB, iest równy summie kwadratów z AD, z CD, i z BC, mnięj dwa razy wziętym Profiokątem z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i CD, równa się kwadratowi z AC, więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC i z BC, mnięj dwa razy wziętym Profiokątem z BC, przez CD.

168. *Przykład.* Niechby Troykąt AC D, był połową Troykąta równobocznego, a zatym AC, dwa razy większa od CD; W takim razie kwadrat z AB, będzie równy summie kwadratów z AC, i z BC, mnięj Profiokątem z tychże boków AC, i BC. C tak można wyrazić: *W Troykacie, którego kąt jeden równa się kątowi prostemu, mnięj trzecią jego częścią, kwadrat boku przeciwnego temu kątowi równa się sumie kwadratów pozostałych boków, i Profiokątem z tychże boków.*

169. *Wnioſki i Przyſtoſowania dwóch Twierdzeń ostatnich.*

1. Jeżeli w Troykacie kwadrat jednego boku

boku równy jest summie kwadratów z ramion kąta przeciwnego, albo większy lub mniejszy od tey summy; kąt też przeciwny będzie prosty, albo roztwarty, lub ostry.

2. W każdym Troykacie, Prostokąt dwa razy wzięty, z boku któregokolwiek i z odległości wierzchołka kąta iednego przy tym boku, od prostopadley spuszczoney natenże bok, z wierzchołka kąta iema przeciwnego, ten mówię dwa razy wzięty Prostokąt, równy jest różnicy między summą kwadratów z dwóch ramion, i kwadratem boku przeciwnego temu kątowi; to jest równy będąc summie tych dwóch kwadratów, mniej kwadratem boku przeciwnego, gdy kąt jest ostry; a gdy roztwarty, to ten Prostokąt dwa razy wzięty, równy będzie kwadratowi boku przeciwnego, mniej summą kwadratów z ramion; a zatym ieżeli wiadome nam są w liczbach boki Troykątu: doydziemy ztąd w liczbach i prostokąta tego podwoynego; doydziemy i odcinka (Segmentum) podstawy, zawartego między wierzchołkiem kąta, o którym jest rzecz, i prostopadłą. Aże kwadrat wysokości Troykąta, równa się różnicy między kwadratem boku przyległego odcinkowi, i kwadratem tegoż odcinka. więc
doy-

doydziemy
i powierze
1^{ro}. P
ki: EC. Al
pierwszy
Kwadra

Smma
ma z 44

Ta fun
kwadrat
stry.

Różni
z AB. iest
się podw
CD, czyl
ku BC. r
czajęca d
wzięcą.

zi się wie
re jest p
dzie 5. k
między
CD: to i
różnica
czone p

CAB. ied
AD: to i

171.
AB 20,
400.

dojdziemy i wysokości Troykąta, a zatym i powierzchni jego.

170. *Przykład 1.* Niech będą trzy boki: BC, AB, AC. w liczbach oznaczone: pierwszy 21, drugi 20, trzeci 13.

Kwadrat z AB, jest: 400.

Summa Kwadratów z BC i AC, jest summa z 441, i z 169, to jest: 610.

Ta summa ponieważ jest większa, niż kwadrat z AB, przeto kąt przy C, jest ostry.

Różnica między tą summą i kwadratem z AB, jest: 210, która to różnica równa się podwoynemu Profokątowi z BC, przez CD, czyli liczbie znaczącej długość boku BC, rozmnożonej przez liczbę oznaczającą długość odcinka CD, dwa razy wziętą. Ten Profokąt pojedynczy wyrazi się więc przez 105. Aże BC oznaczone jest przez 21, więc długość CD, będzie 5. Kwadrat z AD równa się różnicy między kwadratem z AC i kwadratem z CD; to jest różnicy między 169, i 25: Ta różnica jest: 144, więc AD, będzie oznaczone przez 12. Powierzchnia Troykąta CAB, jest połową Profokątu z BC, przez AD; to jest 126.

171. *Przykład 2.* Niech będzie BC 11, AB 20, AC, 13. Kwadrat z AB, będzie 400.

Sum-

Summa kwadratów z BC, i z AC, będzie summa z 121. i 169, to jest: 290.

Ta summa ponieważ jest mniejsza o 1 kwadratu z AB; przeto kąt przy C. będzie roztwarty.

Różnica między tym kwadratem, i tą summą jest: 110; która to różnica równa się podwójnemu Prostokątowi z BC, przez CD, a zatem Pojedynczy Prostokąt będzie = 55. Aż BC. równa się 11; więc CD, będzie się równać: 5.

Kwadrat z AD, równa się różnicy między kwadratem z AC, i kwadratem z CD; to jest różnicy między 169 i 25. Ta różnica jest: 144, więc AD. będzie = 12; a powierzchnia Trójkąta będzie 6. razy 11, to jest 66. Trzeba nawrócić jeszcze o przykładych wprawiać uczniów, dobiegając po większej części do takich, aby Pierwiastki kwadratowe zupełnie w liczbach całkowitych wychodziły.

Przykłady:	Boki	Posiława
51 i 25 -	52, albo 39	
52 i 29 -	69 albo 27	
17 i 39 -	44 albo 38	
68 i 87 -	95 albo 31.	

172. P
gody: uży
rocznych w
wkładam
Znak te
między dw
Znak:
gą przeci
drey ilość
tym flow
+ 5 =
pięć, n

Znak:
nie iedw
się tym
z kład:
miej czte
Dla ozn
Arymetyc
w Geon. et
z to jest k
+ 3. znacz
ne, AB x C
AB, i CD;
Dzielenie
dwoma k
kłada się p
ścią dzielą
6, przez
dzielenie

172. *Przebiegi* 1. Dla większey wy-
cody: używać na potym będziemy skrót-
conych wyrażen, których tu znaczenie
wykładamy.

Znak ten: \equiv wyrażać będzie równość
między dwoma ilościami.

Znak: $+$ gdzie jedna linia prosto dru-
gą przecina, wyrażać będzie dodanie ie-
dnej ilości do drugiej: i wymawia się
tym słowem: *plus* (plus) Naprzykład,
 $4 + 5 \equiv 9$. wymawia się cztery więcej
pięcią, równa się dziewięcią.

Znak: $-$ wyrażać będzie odejmowa-
nie jednej ilości od drugiej; i wymawia
się tym słowem: *minus* (minus) Na-
przykład: $7 - 4 \equiv 3$; wymawia się: siedm
mniejszy czterema, równa się trzem.

Dla oznaczenia różności liczb, w
Arytmetyce, albo Prostokąta z dwóch linii
w Geometrii, używać będziemy znaku:
 \times to jest krzyża ukośnego. Naprzykład
 4×3 . znaczy cztery przez trzy rozmnożo-
ne, $AB \times CD$. znaczy Prostokąt z linii
AB. i CD; albo Prostokąt z AB, przez CD.
Dzielenie oznaczają tym znakiem: to jest
dwie kropkami, jedną pod drugą, które
kładą się po ilości podzielnej, a przed ilo-
ścią dzielącą. Naprzykład $6 : 2$, znaczy
6, przez 2. podzielone. Można także
dzielenie i sposobem ułamków wyrażać
kła-

kładąc za licznika ilość podzielna, a za mianownika, ilość dzielącą kwadrat iakiej ilości, na przykład linii AB, jednym z tych dwóch sposobem zwykły się wyrażać AB^2 , albo AB^2 , częścicy jednak pierwszym.

I tak pierwsze Twierdzenie można było w ten sposób wyrazić:

Fig. 1, $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Fig. 4. Szoste $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \times CD$

Fig. 5. Siódme $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times CD$

Wszystkie trzy tych Twierdzeń przyładki, takby razem mogły być wyrażone: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \pm 2BC \times CD$. W tym razie, gdzie kąt jest prosty, linia CD, a zatem i prostokąt $BC \times CD$, niknie.

173. *Przeestroga 2.* Trzeba ostrzedz Uczniów, aby używając tych skróconych wyrazów, mieli zawsze przed oczyma Figury stosujące się do tychże wyrazów, i dobrze je rozważali. Należy także ustnie pierwey wyrazić każde Twierdzenie lub zagadnienie, nim się przystąpi do pisania ich znakami wyraz skracającemi. Lowszem lepiejby było, aby poty tych znaków nie używać, póki zupełney wprawy nie nabiorą. Uczniowie w wyłożeniu ustnym i iasnym Twierdzeń i Zagadnień im podanych.

ROZ-

ROZDZIAŁ VII.

O *Linjach symetrycznych z kółami o ką-
tach prostych okręgi kół: to kółach, któ-
rych wierzchołki są na jednej prostej, ob-
rotowa okręgi.*

174. *Definicja.* Kóło równie są to, które
mają ten sam promień i ten sam środek; i ta-
kie kóło przynależą do siebie.

Gdyby to podobieństwo nie zdawało się być
tak oczywiste, a było by się do niego do-
szedło za pomocą: wtedy nie należy do-
wodzić go wykładem, ani symbolem. Któ-
regoś wolił Namy w dowodzie I. twa-
rzenie to kół: (8) pokazując, iż dwie
linie równe, o takim samym promieniu oko-
ło jednego i nieporównanego końca, nie mogą
zrobić, tylko równie dwa kół: i tak, też
nawołując te dwie linie, jak gdyby jedna
leżała na drugiej, i tak, gdyby obidwie ra-
zem czyniły ten obrót: w całym kącie,
jakiejkolwiek będzie pochylenie. Słone-
tych dwóch linii, ponieważż są z siebie
do drugiego równoległe, więc nie ma róż-
nicy, które przebiegają w tym samym
kątach, i te, które już przebiegły w kątach
równych, rachując od poprzedzających obró-
tów, przynależą do siebie; a tym samym

te mieysca, czyli koła, któreby zrobiły, mogłyby też do siebie przystać.

Końce tych dwóch linii tak się obracających, w czasach równych, zrobiłyby łuki równe; a zatym w kołach równych, kąty przy ich środkach równe, zamykają swemi ramionami łuki równe.

Wzajemnie gdy w równych kołach, równe łuki weźmiemy, kąty w środkach tych kół które między ramionami swemi zamykają te łuki, będą równe.

Tab. X. Niech będą dwa łuki równe: BA, ba, w dwóch równych kołach. Kąty: ACB, acb, które wierzchołki swoje mają w środkach tych kół, i które zamykają swemi ramionami te łuki, są też równe. Bo gdyby kąty ACB, acb, nie były równe, kąt na przykład ACB, gdyby był mniejszy od kąta acb; to kąt inny, na przykład DCB, byłby równy kątowi acb; a zatym i łuki DB, ab, byłyby równe; ale że wzięliśmy za równe łuki AB i ab, więc łuki także AB i DB, byłyby równe, co jest nie podobna, chyba żeby linie CD, i CA jedną tylko linią czyniły, zupełnie do siebie przystając.

Część koła zawartą między dwoma pro-

promien
wycinki

Z re
wnieś
wycinki
rych ką
nie.
wycink
g.

W
też i
dwóch
złożon
mogą p
promien
równych

Wza
cienci
to Troy
promien
ne, m
środku,
będą ro
re, rów

Przez
rozami
dzy lu

promieniami i łukiem, zwać będziemy wycinkiem koła, (Sector Circuli.)

Z tego, co się wyżej powiedziało, wniesć można, że w równych kołach i wycinki te przyślad mogą do siebie, których kąty, albo łuki są równe; a wzajemnie, że kąty i łuki są równe w tych wycinkach, które przyślad do siebie mogą.

W kołach równych, łuki równe, mają też i cięciwy równe. Jakoż w takich dwóch kołach Troykątów równoramienne, złożone z cięciwy i z dwóch promieni, mogą przyślad do siebie, dla równości promieni i kątów w środku, które na równych łukach wspierają się.

Wzajemnie, jeżeli w kołach równych cięciwy są równe, łuki też równe będą; bo Troykątów złożone z tych cięciw, i z promieni równych, mając trzy boki równe, mogą przyślad do siebie, i kąty w środku, zrobione przez dwa promienie będą równe, a zatem i łuki im przeciwne, równe będą.

Przez odcinek koła (segmentum Circuli) rozumieć będziemy mięysce zawarte między łukiem i cięciwą.

K 2

Gdy

Gdy cienciwa nie jest razem średnicą, dzieli koło na dwa odcinki, jeden większy, a drugi mniejszy od półkoła. Takie dwa odcinki, nazywają się odcinkami nieprzecinkowanymi (Alternant).

W dwóch równych kołach, jeżeli dwa odcinki mają równe łuki, przysłać do siebie mogą. Jakoż te odcinki są różnicami dwóch wycinków mających równe łuki, od dwóch Troykatów, które za podstawy mają cienciwy tychże łuków równych.

Aż te wycinki mogą przysłać do siebie, bo mają łuki równe; Troykаты mogą też do siebie przysłać, bo mają wszystkie trzy łuki równe.

Włóc i dwa odcinki, przysłać mogą do siebie, będąc różnicą dwóch Troykatów równych, od dwóch wycinków równych.

Włóc i koło to, co się teraz powiedziało, można przysłać do łuków, cienciw, wycinków, odcinków jednego koła.

Te rozumowania powinnyby się wydawać oczywistymi, i nie potrzebować wcale żadnego dowodzenia, i z tej przyczyny są bardzo

ludzo
Cezarow
dnieyze
re in iuz
śnie: i a
łob e pr
nie dzy

173.
od sro
środek

2. Lin
la d. s.
paula.

3. Pro
na la cie

Nech
rego sro

1. Pro
wydawic
la.

Dwo
nie pu
dwóch
koła
koła
też zra

bardzo zdadne, aby się na nich wprawiali. Uczniowie widomaczenie się tak najdokładniejszy z tych nawet wyobrażeń, które im już wystawiają rzecz taką doświadczenie: i aby tym sposobem wyobrażenia w sobie proste, prostociejzemi i jeszcze czyścić uczyli się.

173. *Twierd. 1.* Prostopadła ciągnięta od środka cięciwy, przechodzi przez środek koła.

2. Linia prosta prowadzona od środka koła do środka cięciwy, jest do niej prostopadłą.

3. Prostopadła od środka koła spuszczone na cięciwę, przypada na jej środek.

Niech będzie AB, cięciwa w kole, którego środek C, a promień CA.

Fig. 2.

1. Prostopadła od środka D. cięciwy wystawiona, przechodzi przez środek koła.

Dowód. W tej prostopadłej wszystkie punkta jednakowo są odległe od dwóch końców cięciwy; a że i środek koła jednakowo jest odległy od dwóch końców tejże cięciwy; więc będzie też znajdował się na tej prostopadłej.

2. Linia CD, od środka koła poprowadzona do środka cięciwy, jest do niej prostopadłą.

Dowód. Troykąt: DCA, DCB; mają wszystkie boki równe; więc mogą przystać do siebie, a w szczególności kąty przy D. są równe, a będąc kątami przyległymi, obadwa prosto być muszą, a zatem linia CD, jest prostopadła do AB.

3. Prostopadła CD, spuszczonej od środka koła na cięciwę AB, przypada na jej środek.

Dowód. W Troykacie Równoramienym ACB, kąty A i B są równe; więc w Troykątach prostokątnych: ACD, BCD, wszystkie kąty równe będą iedne względem drugich; aże i boki AC, CB. są równe, więc te dwa Troykąty przystać do siebie mogą, a w szczególności linie AD, i BD, są równe.

176. *Wniosek.* Koło nie może mieć więcej, iak dwa punkta wspólne z linią prostą; bo gdyby mogło mieć więcej takich wspólnych punktów, naprzykład trzy; złączymywszy iedną linią punkt pierwszy z drugim, a drugą punkt drugi z trzecim, i od środka koła poprowadzimy do tych dwóch linii dwie prostopadłe, te uczyniłyby

byby T
co jest

177.
kta. k
prostey
te trz;

Roz
nien li
ley p
czacey
le iez
nych z
z rzecz
popraw
się w
koła m
punkta

178.
koła da

Roz
iakioko
iące z
przez t

179.
wydaw
cych

byby Trojkat mający dwa kąty proste,
co jest nie podobna.

177. *Zagad. I.* Mając dane trzy punkta, których położenie nie jest w linii prostej; nakryść koło, któreby przez te trzy punkta przechodziło.

Rozwiąz. Ponieważ środek koła powinien się znajdować na każdej prostopadłej poprowadzonej od środka linii łączącej dwa punkta znajdujące się w koło jeżeli tedy pierwszy z punktów danych złączymy linią z drugim, a drugi z trzecim, i od środka tych dwóch linii poprowadzimy Prostopadłe; te przeczną się w punkcie, który będzie środkiem koła mającego przechodzić przez trzy punkta dane.

178. *Przytłofowanie.* Znaleść środek koła danego.

Rozwiąz. Na okręgu koła, weźmy trzy jakiekolwiek Punkta, a przez poprzedzające zagadnienie szukamy środka koła przez te trzy punkta przechodzącego.

179. *Wniosek.* Ponieważ prostopadłe wystawione na środku dwóch linii łączących punkt jeden dany z dwoma inne-

mi,



mi, nie mogą się przecinać tylko w jednym punkcie; więc nie może być więcej jak jedno koło przechodzące przez te trzy punkta; albo jeżeli dwa koła przechodziły przez te trzy punkta, toby nie były tylko jednym w rzeczy samej kołem; a zitym gdy dwa koła się przecinają, nie więcej mogą mieć jak dwa punkta wspólne w przecięciach. Ta własność koła, że je z trzech punktów danych wyznaczyć można, iako i ta druga, że wszystkie jego promienie są równe; różni koło od wszystkich krzywych linii; podobnie iako linia prosta różni się jeszcze od wszystkich linii, że należy jej mieć dwa punkta dane, aby ją wyznaczyć.

180 *Twierdź: 2.* Od końca promienia koła wyprowadziwszy Prostopadłą do tegoż promienia: wszystkie inne punkta tej prostopadłej będą za kołem.

Dowód. Odległością któregokolwiek z tych innych punktów. od środka koła, jest przeciwprostokątna Trójkąta, którego bokiemi jest promień koła; a że przeciwprostokątna większa jest od jednego z boków Trójkąta; więc i odległość od środka koła, punktu któregokolwiek na prostopadłej, oprócz tego, któ-

Wtedy
oraz
tych

181.
ko ma
tka
(Tangen

182.
okrę
styczną

Roz
ta ziera
ktu wyp
nienia;
lem w pu

183.
kołem,
czną.

Rozw
środkiem
średnicy
gdzie ob
le ca e
którego
danego.

który jest końcem promienia, wiąża się
od tegoż promienia; a z nim każdy z
tych punktów będzie za kołem.

181. *Defin.* Gdy prosta linia jest tylko
na punkcie styczności z okręgiem koła,
taka linia nazywa się styczną z kołem
(Tangens Circuli.)

182. *Zagadn.* 2. Małże dany punkt na
okręgu koła, poprowadzić przez niego
styczną.

Rozwiąz. Punkt dany z środkiem ko-
ła łączymy promieniem; i od tegoż pun-
ktu wyprowadzamy prostopadłą do pro-
mienia; a ta linia będzie i styczną z ko-
łem w punkcie danym.

183. *Zagadn.* 3. Od punktu danego za
kołem, poprowadzić do tegoż koła, sty-
czną.

Rozwiąz. Złączmy linią, punkt dany z
środkiem koła. Następnie linii, jako na
średnicy, narysujmy półokrąg; punktem,
gdzie okrąg ten się przecinać będzie ko-
ło dane, łącząc tym samym punktem do
którego poprowadzono linię od punktu
danego, będzie styczną z kołem (159.)

To zagadnienie dwoiako może być rozwiązane; gdyż połkoie z iedney lub z drugiey strony średnicy nakreślić można.

184. *Twierdz. 3.* Od końca promienia poprowadziwszy styczną z kołem, ieżeli przez punkt, w którym się ta styczną kółła dotyka, przeciągniemy inną iaką linią prostą, ta przecinać będzie okrąg koła.

Dowodz. Promień koła jest prostopadły do styczney w końcu tegoż promienia, a zatem pochyły będzie do kaźdey inney linii; przez ten koniec promienia, to iest punkt koła przychodzącey. Poprowadziwszy więc prostopadłą od środka koła do tej linii; ta prostopadła krótsza będzie od promienia; bo promień będzie przeciwprostokątną tego Tróykąta, którego ta prostopadła będzie tylko bokiem; aże koniec promienia iest na okrągu koła, więc koniec tej prostopadley nie doydzie do okrągu koła. Już tedy ieden punkt tej linii będzie w kole, a drugi w samym okrągu koła, na końcu promienia; a zatem linia ta przechodząca przez koniec promienia, ponieważ drugi swój punkt ma w kole, przecinać go musi.

185. *Twierdz. 4.* Jeżeli linia prosta iest styczną z kołem, będzie:

1. Pro-



1. Promień poprowadzony od punktu tego, gdzie się linia styka z kołem będzie do tej styczney prostopadłym.

Jakoż, gdyby promień do punktu tego poprowadzony, nie był do styczney prostopadłym, tedy linia inna prostopadła do tego promienia, i przechodząca przez jego koniec, byłaby styczną z kołem, a ta pierwsza zamiast stykania się z kołem, przecinałaby go, iako się w poprzedzającym twierdzeniu okazało.

2. Prostopadła do styczney, od punktu do tknięcia ciągniona, przechodzi przez środek koła.

Gdyby ta prostopadła nie przechodziła przez środek koła, tedyby jednak promień do tegoż punktu do tknięcia ciągniony był prostopadłym do styczney, a zatyln od jednego punktu, to jest od punktu do tknięcia, możnaby dwie prostopadłe prowadzić, co jest nie podobna.

186. Uwaga. Pokazaliśmy (59) własność kąta, którego wierzchołek jest na okręgu koła, a którego dwa ramiona wciieraia się na końcach średnicy tegoż koła: to podanie było tylko przypadkiem szczególnym podania daleko ogólniejszego,

go,

go, w którym się dowodzi, że wszystkie te kąty są równe, które wierzchołek ma na okręgu koła, a ramionami wspierają się na końcach różnych łuków tegoż koła.

187. *Twierdzenie 5.* Kąt mający swój wierzchołek na okręgu koła, a którego ramiona są cięciwami tegoż koła, jest połową innego kąta, który ma wierzchołek w samym koła i szosku, a ramionami swemi obejmują tenże sam łuk, co i kąt pierwszy.

Fig. 3. Niech będą kąty ACB , ADB , z których pierwszy ma wierzchołek w środku C koła, a drugi na okręgu tegoż koła w punkcie D ; i niech obadwa te kąty obejmują ramionami swemi tenże sam łuk AB . W takim razie kąt ACB dwa razy jest większy od kąta ADB .

Przypadek 1. Gdy jedno ramie AD kąta ADB , jest razem i średnicą koła.

Dowód. Trojkąt BCD , jest równoramiennym, więc kąty B i D będą równe, a suma ich, dwa razy większa od jednego z nich; ale że kąt ACB , jako zewnętrzny, równa się tej sumie kątów B i D , więc dwa razy jest większy od jednego z nich, na przykład od kąta D .

Przy-

Przypadek 1. w których żadne ramie kąta ADB nie byłoby razem równą poł. można łatwo przypisać do przypadku pierwszego, poprowadzwszy średnicę BE . Fig. 4 i 5

Przypadek 2. Gdy środek C , jest między ramionami kąta ADB .

Dowód. Kąt ADB , składa się z dwóch kątów: ADE , i EDB , a kąt ECB składa się także z dwóch kątów: ACD i ECB ; aże według dowiedzenia w pierwszym przypadku, każdy z tych dwóch ostatnich kątów, jest dwa razy większy od jednego z pierwszych, którego ramiona obejmują także ten sam łuk; więc obadwa razem pierwszy kąt są też dwa razy większe od obydwóch razem kątów drugich; a zatem kąt ACB , dwa razy jest większy od kąta ADB . Fig. 4

Przypadek 3. Gdy środek C , nie jest między ramionami kąta ADB .

Dowód. Kąt ECB , dwa razy jest większy od kąta EDB ; (1. Przypadek) tenże kąt ECB , składa się z dwóch kątów: ECA , ACB ; kąt także EDB , składa się z dwóch kątów: EDA , ADB ; a że kąt ECA dwa razy jest większy od kąta EDA (1. Przyp.) więc i kąt ACB , większy dwa razy będzie od kąta ADB . Fig. 5.

188. *Uwaga.* Uczniowie poczynający, więcej doznawać zwykli trudności, w pojęciu tego trzeciego przypadku, niż drugiego, w którym przez dodawanie to samo się dowodzi; co w trzecim przez odejmowanie. Można im to w ten sposób objaśnić, że dwie naprzykład liczby 12, i 8, z których pierwsza dwa razy jest większa od 6, a druga od 4, te mówię dwie pierwsze liczby, gdy dodane będą, summa ich: 20, będzie też większa dwa razy od summy dwóch drugich liczb 6, i 4, to jest od 10. A przeciwnie gdy naprzykład 12, i 8; pierwsze większe jest dwa razy od 6, a drugie od 4, różnica między 12, i 8, to jest 4, dwa razy też większa będzie od różnicy między 6, i 4, to jest od 2.

Gdyby tego była potrzeba, możnaby na liniach to samo okazać.

Fig. 6. Niech będzie Linia AB, większa dwa razy od CD, i AE większa tak że dwa razy od CF. Od punktu E, naznaczymy na linii AB, Linie EG, EH, równe liniom FC, FD; Linie: AG, i BH, będą tak jedna, iako i druga oznaczać różnicę Linii AE, od CF; summa zaś tych dwóch linii AG, i BH, oznaczy różnicę całej linii AB, od całej linii CD.

189. *Wniosek.* Kąty przy okręgu koła, które ramionami swemi jednakowe łuki obejmują, są równe: albo co ra iedno wychodzi, kąty w tymże samym odcinku koła są równe. Że tak w samey rzeczy jest co do kątów przynajmniey ostrych, to jest: których ramiona obejmują łuk mniejszy od pół okręgu wynika to z Twierdzenia poprzedzającego. Z następującego zaś wniosek będzie łatwo można, że to samo ma miejsce i w kątach przy okręgu koła, których ramiona obejmują okrąg większy od pół okręgu.

190. *Twierdz. 6.* Summa kątów w odcinkach na przemian, (1-4.) równa się dwóm kątom prostym: albo co iednoznaczny, jeżeli czworokąt jest kołem obwiedziony, summa kątów przeciwnych tego czworokąta, równa się dwóm kątom prostym.

Niech cięciwa AB, dzieli koło na dwa odcinki: ADB, ACB: kąt ADB, w jednym odcinku, wraz z kątem ACB w drugim odcinku, wyrównywa dwóm kątom prostym: albo, summa kątów D, i C, czworokąta kołem obwiedzionego, równa się dwóm kątom prostym.

*Tab. XI
Fig. I*

Przygotowanie. Poprowadźmy Przekątną DC.

Dowod

Dowódz. Kąty ADC. ABC. obejmują okładwa ramionami swemi łuk ieden AC, mniejszy od pół okrągu: więc są równe. Dla teyże przyczyny i kąty BDC. BAC, są równe. Summa tedy kątów ADC. BDC, to jest kąt ADB, równa się summie kątów: ABC, BAC a zaiym summakątów ADP, ACB, równa jest summie trzech kątów Trojkąta ABC; a ponieważ ra ostatnia summa wyrównywa dwóm kątom prościym, więc i tamta.

Powtorzenie. Jeżeli cienciwa jest razem i średnicą, dzieli koło na dwa półkoła, a w każdym tym półkołe, kąty są proste.

Jeżeli cienciwa nie jest średnicą: dzieli koło na dwa odcinki, ieden większy, a drugi mniejszy od pół okrągu; kąt w większym odcinku wspiera się na łuku mniejszym od pół okrągu, i jest ostry; iednakowey zawsze wielkości. Kąt zaś w mniejszym odcinku wspiera się na łuku większym od pół okrągu, i jest rozwarty, dopełniający zawsze dwóch kątów prostych, z kątem ostrym w drugim odcinku.

191. *Twierdzenie 7.* Jeżeli od punktu w odcinku koła, lub z odcinkiem będącego, do końców podzieliwy tego odcinka poprowadzimy dwie linie, kąty między temi dwiema liniami zawarty będzie w pierwszym razie większy, a w drugim mniejszy od kąta w danym odcinku.

Niech
za odcin
punktu
tegoż od
będzie v
mniejszy

Dowódz.
jest zew
jest wię
kątów
ACB, w

W d
trzy Tr
kąta D, a
D, jest m

192.
gdzie ra
krąg w p
summie
beymuie
ry też k
ułożenian

W dru
cina okr
szy jest o
CBD; k
ramiona

Niech będzie punkt D. w odcinku albo za odcinkiem CAB: poprowadzony od punktu tego. do końców Podstawy AB, tegoż odcinka Linie DA, DB. kąt ADB, będzie większy w pierwszym razie, a mniejszy w drugim, od kąta ACB.

Dowódz. W pierwszym razie, kąt ADB, jest zewnętrzny Trojkąta DBC, więc jest większy od jednego z wewnętrznych kątów tegoż Trojkąta; to jest od kąta ACB, w samym odcinku.

W drugim razie, kąt ACB, jest zewnętrzny Trojkąta CDB, a zatem większy od kąta D, albo. co na jedno wychodzi, kąt D, jest mniejszy od kąta C, w odcinku.

192. *Uwaga 1.* W pierwszym razie, gdzie ramie BD przedłużone spotyka okrąg w punkcie E, kąt ADB, równa się sumie kątów: BCD, CBD, a kąt CBD obejmuje swemi ramionami łuk EC, który też łuk zawarty jest między przedłużeniami ramion AD, BD, kąta ADB.

W drugim razie, gdzie ramie BD przecina okrąg w punkcie E: kąt ADB mniejszy jest od kąta ACB, w odcinku, kątem CBD; który to kąt CBD obejmuje swemi ramionami łuk CE, a ten łuk CE,

L

fzy

szty jest od łuku AB, obiętego od tychże ramion AD, BD kąta ADB.

193. *Uwaga 2.* Na okręgu koła znajdując się te wszystkie punkta, od których poprowadziwszy dwie linie do dwóch punktów danych, kąt między dwiema temi liniami zawarty, jednakowy zawsze będzie: to jest, okrąg koła jest *miejszem* (Locus) tych wszystkich punktów.

194. *Defin.* Kąt zawarty między styczną z kołem i między cięciwą przez punkt dotknięcia prowadzoną, nazywa się *kątem odcinka*.

195. *Twierdż. 3.* Kąt odcinka, równa się kątowi w odcinku na przemiennie.

Fig. 3. Niech będzie ABD kąt odcinka, między BD, styczną z kołem, i BA, cięciwą przechodzącą przez B, punkt dotknięcia. Ten kąt równy jest kątowi któremukolwiek w odcinku na przemiennie, na przykład kątowi BEA, którego jedno ramie BE jest średnicą do punktu dotknięcia B, poprowadzoną.

Dowód. Kąt EBD, między średnicą EB, i styczną BD, zawarty, jest prosty (185) to jest summa kątów: ABE, i ABD, czyli kąt prosty.

Kąt

Kąt A w półkole jest też prosty (159) więc suma kątów ABE , AEB , w tymże samym Trójkącie równa także łódzie kątowni prostemu. A zatem kąt AB tak z kątem AEB , jak i z kątem APD , czyni kąt prosty. Można tedy równo być kąty AED , i AEB . Łódzy przydany kąt ay z o-
tobna do kąta ABE , czyli równa summe.

196. *Zagadn. 4.* Na linii danej zrobić odcinek koła, w którym odcinek znaleźć by się kąt dany.

Niech będzie linia AB , na której zro- Fig. 3.
bić trzeba ten odcinek.

Przewieźmy z Ośrodka B , prowadząc linia BD , czyli cięciwę koła, którą dany kąt BA . Odcinek BD na linii AB wyznaczamy prostopadłą do BD od punktu A , cięciwą prostopadłą do AB . Punkt E , przecięcia tych dwóch prostopadłych, wyznaczy nam wielkość cięciwy BD bliższy do tego koła, w którego odcinku na się znaleźć kąt dany.

Ad 1. Ośrodek linii danej AB . prowadzący prostopadłą do AB przez punkt E , koła przecinać li-
nię AB w punkcie F , który będzie za-
środek koła, w którym będzie odcinek
żądany.

Zamiast robienia kąta ABD, równego danemu, możnaby zrobić kąt ABE, dopełniający kąt dany do 90. stopniów, to jest czyniący z nim razem kąt prosty.

197. *Zagadn. 5.* Mając dane koło, oddzielić od niego odcinek, w którymby się zmieścił kąt dany.

Rozwiąz. Od punktu któregokolwiek na okręgu koła danego, ciągnę styczną, a przez punkt dotknięcia prowadzę cienciwę czyniącą kąt dany z styczną. Ta cienciwa oddzieli w kole odcinek żądany.

198. *Zagadn. 6.* W koło dane wpisać (inscribere) Troyką, któryby miał kąty wszystkie równe kątom Troykąta danego.

Rozwiąz. 1. Pociągnąwszy styczną przez którykolwiek punkt okręgu koła, przez tenże punkt prowadzę dwie cienciwy po prawey i po lewey ręce, czyniące dwa kąty równe kątom Troykąta danego. Linia trzecia łącząca końce tych dwóch cienciw, będzie trzecim bokiem Troykąta, którego kąty wszystkie równe będą kątom Troykąta danego.

Rozwiąz. 2. Troykąt dany opisać (circumscribo) kołem, i do trzech wierzchoł-

chołkow
trzy
kiesie
Funkta
kola, pr
pierwsz
Troykąta

199.
wpisać
koło, k
tego Tr

Rozu
jednakow
kier trz
musi się g
lącący ką
równe cz
punktów
awó h b
podzieliw
gi kąt T
ta druga
środek k
punkt prz
gły od w
ta danego

200. 2
pisać nan

chołków kątów, prowadzę od środka trzypromienne. Od tegoż samego środka, kreślę koło, promieniem koła danego. Punkta, w których okrąg tego drugiego koła, przecinać będzie promienie trzy pierwszego, będą wierzchołkami kątów Troykątą, którego szukam.

199. *Zagadu. 7.* Mając dany Troykąt, wpisać wewnątrz koło; to jest nakreślić takie koło, któreby się dotykało trzech boków tego Troykąta.

Rozwiąz. Środek tego koła, ponieważ jednakowo ma być odległy, od wszystkich trzech boków Troykąta danego, musi się gdzieś znajdować na linii dzielącej kąt którykolwiek Troykąta na dwie równe części, gdyż tej linii odległość punktów wewnątrz będzie równa od dwóch boków Troykąta iey przyległych; podzieliwszy na dwie równe części, i drugi kąt Troykąta drugą linią; tam gdzie ta druga linia przetnie pierwszą, będzie środek koła, którego szukamy, bo ten punkt przecięcia będzie jednakowo odległy od wszystkich trzech boków Troykąta danego.

200. *Zagadu. 8.* Mając dane koło, opisać na nim (circumscribere) Troykąt, któryby

ryby miał kąty wszystkie równe kątom
Troykąta danego.

Rozwiąz. 1. W Troykąt dany wpi-
suje koło; i do Punktów trzech dotknię-
cia, prowadzę trzy promienie. Od tegoż
samego środka kreślę drugie koło, promie-
niem koła danego. Punkta, w których
okrąg tego drugiego koła przecinać bę-
dzie promienie trzy pierwszego, albo ich
przedłużenia oznaczają trzy punkta do-
tknięcia trzech boków Troykąta, którego
szukam.

Rozwiąz. 2. W czworokącie, który się
zrobi z dwóch promieni koła danego, i z
dwóch stycznych z kołem w końcach
tychże promieni, kąty dwa między temi
promieniami i stycznymi będą proste, a za-
tem kat jeden między dwiema stycznymi,
i drugi kat między dwoma promieniami,
będą razem wzięte, równe dwóm kątom
prostym. (85) Ztąd wypada wykreślenie
następujące.

Prowadzę promień jeden w kole da-
nym; po obydwóch stronach tego promie-
nia, prowadzę dwa inne czyniące z pier-
wszym dwa kąty, równe kątom dwóm
dopełniającym dwa którekolwiek kąty
Troykąta, do 180 stopniów, to jest równe
dwóm

dwom kątom przyległym (14) do dwóch krótychkolwiek kątów, też oż Trojkąta. Przez końce tych trzech promieni przecięgamy trzy styczne, to zrobią Trojkąt zadany.

ROZDZIAŁ VIII.

Wstęp do Proporcji przez przykłady Geometryczne, z przytroczeniem w szczególności do Trojkątów podobnych, a w ogólności do innych figur prostokątnych także podobnych.

Dotąd uważaliśmy tylko wielkość różnych ilości i figur, co do przytawiania jednych do drugich, czyli do ich równości. Teraz też same ilości porównywać z sobą będziemy w sposób ogólniejszy.

201. Zobaczmy. Widzieliśmy, że dwa równoległoboki, które miały jednakową podstawę i wysokość, były równe. Weźmy teraz dwa równoległoboki z równą wysokością, ale z nie jednakową podstawą; i obaczmy, co za różnica wypadnie między temi dwoma równoległobokami, z przy czyny nierówności ich podstaw.

Jeżeli

Jeżeli podstawa jednego z tych równoległoboków, dwa, trzy, cztery, i t. d. razy, większa będzie od podstawy drugiego; da się podzielić ten pierwszy równoległobok na dwa, trzy, cztery, i t. d. równoległoboki równe między sobą, i z drugim równoległobokiem; ponieważ wszystkie jednakowe mieć będą wysokości, i podstawy; a zatem ten pierwszy równoległobok będzie dwa, trzy, cztery, i t. d. razy większy od drugiego.

Gdyby podstawa pierwszego równoległoboku nie zamykała w sobie kilka zupełnie razy podstawy drugiego równoległoboku; na przykład, gdyby ta pierwsza podstawa miała w sobie 4, 5, 7, i t. d. takich części, jakich podstawa druga ma 3; można by tę pierwszą podstawę podzielić na 4, 5, 7, i t. d. części równych między sobą, i równych także każdej z 3. części drugiej podstawy; a zatem, iako liczby ukazujące wielkość podstawy pierwszego równoległoboku względem podstawy drugiego, są 4, 5, 7, i t. d. i 3; tak też liczby ukazujące wielkość pierwszego równoległoboku względem drugiego, są: 4, 5, 7, i t. d. i 3. Albo; iako podstawa pierwszego równoległoboku zamyka w sobie podstawę drugiego tyle razy, ile oznaczają liczby ułamkowe: $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, i t. d.; tak też

też pierwszy
tyleż drugiego
fame będzie

Podobnie
równe wy
jeżeli p
vierał w
dwa, trzy
włażda
bądź się
kwa od
włażda
miał z
zy po
składe z
iako się
głaco.
Trojkątn
drug 5.
dwa Troj
dwa 5.
tów, ma
wysokoś
aza pod
wy tamy
podstawa
tawy dr
pierzeg
chłczag

też pierwszy równoległobok zamyka w sobie drugi, tyle razy, ile oznaczają te same liczby ułamkowe: $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, it.d.

Podobnie gdy dwa Trojkąty mają równe wysokości, a nierówne podstawy; jeżeli podstawa pierwszego Trojkąta zawierać w sobie tyle połów drugiego, dwa, trzy, cztery it.d. razy: to też powierzchnia tego pierwszego Trojkąta, będzie dwa, trzy, cztery it.d. razy większa od powierzchni drugiego. Toż mówić, gdy podstawa jednego Trojkąta, zamieści zawiesz w sobie kilka zupełnie razy podane drugie, będzie się tylko składać z kilku takich części równych, z jakich się składa i podstawa Trojkąta drugiego. W tak jeżeli podstawy obydwóch Trojkątów zamykają w sobie, jedna 4, a druga 5, takież równych części; to też dwa Trojkąty zamykają sobą jeden 4, a drugi 5, równych między sobą Trojkątów, mających wysokość jednakową z wyjątkiem nie podzielonych Trojkątów, a za podstawę, część jedną tylko podstawy tamtych Trojkątów. A zatem, jako podstawa pierwszego Trojkąta jest 4 podstawy drugiego, tak też i powierzchnia pierwszego Trojkąta będzie 4 powierzchni drugiego.

Dwa

Dwa kąty mające swoje wierzchołki w środku tego samego koła, albo koł równych, i obey nujące ramionami swemi łuki równe, są równe (174).

Jeżeli tedy z dwóch kątów w środku koł równych, jeden wspiera się na łuku, dwa, trzy, cztery it. d. większym, niżeli jest ten, na którym wspiera się kąt drugi; można tamten kąt większy podzielić na dwa, trzy, cztery it. d. kątów równych sobie i kątowi drugiemu. Toż samo mówić można, gdy dwa łuki nie zupełnie się zamykają jeden w drugim. Y tak jeżeli jeden z tych łuków może być podzielony na 4. równe części, a drugi na 3. także części; dwa kąty, które się wspierają na tych łukach, mogą się podzielić, jeden na 4, a drugi na 3. kąty równe między sobą.

Toż samo przystosować można i wycinkom w kołach równych, względem łuków, które ramionami swemi też wycinki obeymują.

W takich szczególnych razach, szukano, ilekroć dwie jakie ilości jednakowego gatunku, na przykład dwie linie, dwa łuki, koła, zamykały się jedna w drugiej, i znawdowano, że tylekroć i inne dwie ilości jednakowego także gatunku zamykały

kąty się je
dwa Równ
dwa wyci

202. D
siebie przy
li, ile raz
takie przy
stołki (kier
metrica)
tych dw
ści, które
będziemy
cedens na
tey, do
pierwszą
je, (sens)
rownania
kłać m
Dwa stoł
równomi

203. L
widziemy
trycznej
wego ga
przyrow
go garun
tego, za
których
drug, b

kały się jedna w drugiej, na przykład:
dwa Rownoległoboki, dwa Trojkąty,
dwa wycinki i. t. d.

202. *Definicja.* Gdy dwie jakie ilości do siebie przyrównujemy, abyśmy wiedzieli, ile razy jedna zamyka w sobie drugą, takie przyrównywanie nazywać można *Stosunkiem Geometrycznym* (*Ratio Geometrica*) albo bez przydatku *Stosunkiem* tych dwóch ilości. Pierwszy wyraz ilości, którą do drugiej stosujemy, zwać będziemy *Poprzedzonym* *Stosunku* (*antecedens rationis*). Drugi zaś wyraz ilości, do której przyrównujemy ilość pierwszą, nazwiemy *Następnym* (*consequens*) *Stosunku*. To co z tego przyrównania wynika, nazywać można *Wysiężeniem* *Stosunku* (*exponens rationis*).
Dwa stosunki nazywają się *równymi*, gdy równymi są ich wykładniki.

203. *Uwaga.* Z tych samych Definicji wiążemy, że wyrazy *Stosunku Geometrycznego*, nie mogą być tylko jednokrotnego gatunku, gdyż nie można do siebie przyrównywać, tylko ilości jednakowego gatunku: a ztąd dwa wyrazy *Stosunku* tego, zawsze w liczbach mieć możemy, z których jedna tyle razy zamykać w sobie drugą będzie, ile razy ilość przyrównywać

wać się mająca, zamyka w sobie drugą ilość tegoż gatunku, do której ją przyrównujemy. Przeto stosowanie takie uważać można iak dzielenie, liczebne biorąc za liczbę podzielną poprzednika stosunku, za liczbę dzielącą następnika stosunku, a za wieloraz wykładnika tegoż stosunku. Wykładnik tedy jedno będzie, co ułomek, którego Licznikiem Poprzednik, a mianownikiem następnik stosunku.

204. Gdy się cztery ilości takie znajdą, że stosunek dwóch pierwszych, równy jest stosunkowi dwóch drugich; takie cztery ilości czynią *Proporcją Geometryczną*, albo bez przydatku, *Proporcją*; i mowiemy, że tak się ma Poprzednik pierwszego stosunku, do swego następnika, iak się ma Poprzednik drugiego stosunku do swego także Następnika. I tak, przypadki szczególne, któreśmy za przykład wyżej przytoczyli, takby mogły być wyrażone.

Jeżeli dwa Równoległoboki iednakową mają wysokość, powierzchnia iednego z nich, tak się będzie miała do powierzchni drugiego, iak się ma podstawa pierwszego, do podstawy drugiego. Jeżeli dwa Troykąty iednakową mają wysokość, powierzchnia iednego Troykąta, tak się ma do powierzchni drugiego - Troykąta, iak się

fe ma pod
wy drugie

Jeżeli dw
nych kół
tów, tak
go, iak
pierwszeg
ramion d

Jeżecze
nia wyraz
kowe w
iak ich p

Dwa Tr
tak się ma

Dwa ka
się mają d
rych się w
ciach k

Na kon
czalem wy
kaicę całą
ono wyra
ilości odm
zawiesz, a
takowych

się ma podstawa pierwszego do podstawy drugiego.

Jeżeli dwa kąty w środku dwóch równych kół znajdują się: jeden z tych kątów, tak się mieć będzie do kąta drugiego, jak się ma łuk objęty od ramion pierwszego kąta, do łuku objętego od ramion drugiego kąta.

Jeszcze i tak możnaby te same podania wyrazić: Dwa równoległoboki jednakowej wysokości tak się mają do siebie, jak ich podstawy.

Dwa Trykąty jednakowej wysokości, tak się mają do siebie, jak ich podstawy.

Dwa kąty w środku kół równych tak się mają do siebie, jak dwa łuki, na których się w pierśnią. Toż mówić i o wycinkach kół równych.

Na koniec jeszcze krócej zwykły się czaiem wyrażać podobne podania. zamykając całą proporcją w dwóch tylko naokoło wyrazach, i to jeszcze znaczących ilości odmiennego gatunku. *Wiele* natym zarzuciło, aby Uczniowie znali się dobrze na takich wyrazach często używanych.

Mowi

Mówi się na przykład, że powierzchnia równoległoboku, którego wysokość jest *jednolayna* (*constans*) proporcjonalną jest do swojej podstawy.

Tu się opuszcza wyraz drugiego równoległoboku, który także wchodzi w porównanie, i jego podstawy; ale się wyrazów tych domyslać trzeba. Dla tego się zaś opuszczają, że ten drugi równoległobok równy z pierwszym wysokości być mniemamy, i jednolayney, to jest nieodmiennej podstawy, a zatym i powierzchni. Będzie tedy pierwszy równoległobok tym większy albo mniejszy względem drugiego równoległoboku opuszczonego, im podstawa pierwszego większa lub mniejsza jest od podstawy drugiego. Tak, niech pierwszy równoległobok ma wysokości 3. łokcie, równie iak i drugi; jeżeli ten drugi równoległobok mieć będzie podstawę łokci 4, zawsze jednolayną i nie odmienną, a zatym i jednolayną powierzchnią 12. łokci kwadratowych; pierwszy równoległobok tym większy lub mniejszy będzie od drugiego to jest, tym większą lub mniejszą mieć będzie powierzchnią od drugiego, im większą lub mniejszą da mu podstawę od drugiego. Dawszy mu na przykład podstawy 8. łokci, będzie powierzchnia jego 24 łokci

kei kwadratowych, dwa razy większa od powierzchni drugiego równoległoboku; dawszy mu podstawy 2. i 4. kei, będzie powierzchnia jego 6. Iteci kwadratowych, dwa razy mniejsza od powierzchni tegoż równoległoboku, i t. d. Gdy tedy ten pierwszy równoległobok, albo powierzchnia jego, tyle ile tylko powiększał pomniejszaw zgłędem, powierzchnia drugiego równoległoboku, ile ile powiększy lub pomniejszy, cofawa tego względem podstawy drugiego kątowego, doświadczyć więc powiększenie w takim razie, że powierzchnia tego równoległoboku, którego wielkość jest stała, i nieporównywalna do powierzchni podstawy, jest trzy razy większa owa razy, i trzy razy mniejsza będzie owa razy; trzy kanta dwa razy mniejsza, to i ta, i t. a.

205. Niek będą cztery ilości oznaczo-
ne przez A, B, C, D. Ilość do której się do-
wać można; zgodzić się, aby ilorazek
ten wyraził kształtem następującym: $A:B = C:D$; co tak się wyraża: A, tak się
ma do B, jak C ma do D. Ilość C, co do B, bwa podob-
nieżeczne między dwoma wyrażeniami ka-
żdego w szczególności refleksu, ztąd ka-
żdego z czterech ilorazów refleksu, wyraża przez drugie
dwie. Zos iloraz y, pośród nich znaczą rów-
ności dwóch ilorazów,

206. *Wnioſki.* Z tych zaſad (principi-um) któreśmy o proporcjach założyli, wynikaia naſępujące podania.

1. Jeżeli dwa ſtoſunki ſą równe trzeciemu; równe też i ſobie będą.

2. Jeżeli w dwóch Proporcjach trzy pierwſze wyrazy w iedney, równe ſą trzem pierwſzym wyrazom w drugiej; to i czwarte wyrazy równe też będą.

3. Stosunek między dwiema ilościami tenże ſam ieſt. co i między temiż ilościami podwoionemi, potroionemi i t. d. Tak na przykład 4. ma ſię do 2, jak 8. do 4, albo jak 12 do 6. i t. d. Ztąd wynika, że można podzielić, albo rozmnożyć przez iednakową liczbę dwa pierwſze lub dwa oſtatnie wyrazy Proporcji, nie naruszając przeto proporcji między temiż czterema wyrazami.

4. Można takżę podwoić, potroić, i t. d. obadwa Poprzedniki, albo obadwa Naſtepniki; a proporcja wſzelak będzie zachowana. W pierwſzym razie wykładnik ſtoſunków, ſtanie ſię dwa, trzy i t. d. razy więſzym niż był z początku; w drugim zaś razie będzie tylko połową, trzecią częścią, i t. d. Wykładnika pierwſzego.

5. W tey-

5. W
ośmiec
kom; to
gdzie by
ganie by
o tey
dzy dw
Y tak u
12: 6. m
niów:
tako led
ko w
ſtoſunk
równe
przez 6.
ka, a. b
proporc
12 ſą r
6 przez
nika, a
meki.
nie w i
tak moż

6. W
dzień, że
wſzych

5. W rzeczy samej proporcji, można odmienić miejsce obydwom Poprzednikom: to jest: położyć tam Poprzedniki, gdzie były Następni, a Następni tam, gdzie były Poprzedniki; równość jednak i po tej odmianie zachowana będzie między dwoma stosunkami (czyż proporcji). Y tak na przykład w tej Proporcji: $4:2::12:6$, można odmienić położenie Poprzedników: 4 i 12 i rapitać: $2:4::6:12$, wfszako jednak zachowaną Proporcją: $4:2::12:6$ w pierwszej proporcji wykładniki stonków obydwóch: $4:2$ i $12:6$, były równe; to jest tak, 4 przez 2 , jak 12 przez 6 , podzielone dawały na wykładnika, albo na wieloraz, 2 ; tak i w drugiej proporcji, wykładniki stonków $2:4$ i $6:12$ są równe; to jest tak 2 , przez 4 , jak i 6 przez 12 podzielone, dała na Wykładnika, albo na wieloraz jednakowy momek: $\frac{1}{2}$. Toż mowić i o podobnej odmianie w jakiegokolwiek innej Proporcji: co tak można ogólnie przez litery wyrazić:

Jeżeli $A:B::C:D$.

to też i $B:A::D:C$

6. W proporcji każdej można powiedzieć, że summa, albo różnica dwóch pierwszych wyrazów, tak są ma do jedne-

M

g

go z tych dwóch wyrazów, jak się ma summa albo różnica dwóch drugich wyrazów, do jednego z tychże wyrazów. Naprzykład jeżeli $4:2 = 12:6$, to też będzie $6:2 = 18:6$, albo $6:4 = 18:12$, albo $2:4 = 6:12$.

Jakoż jeżeli każdą Poprzednika i Następnika sumę lub różnicę stosujemy do następnika iey własnego; Wykładnik każdego w szeregowości stosowania powiększy się lub pomniejszy jednością, a zatem równy będzie w obydwóch stosunkach i potakiey odmianie.

Jeżeli zaś każdą Poprzednika i Następnika sumę lub różnicę stosujemy do Poprzednika iey własnego, jedno czytamy, jak gdybyśmy pierwszy poprzednika każdego za Następnika położyli, a potem dopiero, sumę lub różnicę ich stosowali do następników, tak jak wyżej; a zatem też częścią pomnoży się lub zmniejszy wykładnik pierwszego stosunku, jak i drugiego.

Wyrażenia literalne tegoż samego.

Jeżeli $A:B = C:D$.

to też $A + B: B = C + D: D$

$A - B: B = C - D: D$

$A + B: A = C + D: C$

$A - B: A = C - D: C$

Gdyby
swoich
i Do d C
by w t

B-

B-

7. G
jednego
kie zna
i t. d. r
Poprze
dwóch
wiek po

Jako
naprzy
Następn
razy ra
będzie;
tyle też
stępni
tak się
ków, jak
dnik co
zumowa
żnicy d
dwóch

Gdyby Następniki większe były od swoich Poprzedników, na przykład B od A, i D od C; tę proporcję $A:B::C:D$ można by w tę zamienić $B:A::D:C$, a zatem.

$$B-A: A-D-C: C$$

$$B-A: B-D-C: D.$$

7. Gdy w Proporcji, cztery wyrazy jednego są gatunku; to jest, gdy wszystkie znaczą n. p. linie, lub powierzchnie i t. d. można powiedzieć że suma dwóch Poprzedników, tak się ma do sumy dwóch Następników, jak się ma którykolwiek poprzednik do swego następnika.

Jakoż, jeżeli jeden Poprzednik zamyka na przykład dwa, trzy i t. d. razy swego Następnika, i drugi też Poprzednik, tyle razy następnika swego zamysłać w sobie będzie; a zatem i suma Poprzedników, tyle też razy zamysłać będzie sumę następników. I jeżeli suma Poprzedników tak się mieć będzie do sumy następników, jak każdy w szczególności Poprzednik do swego Następnika. To samo rozumowanie przystosować można do różnicy dwóch Poprzedników i do różnicy, dwóch następników; i do więcej jak dwóch równych stożków.

Wszystkie te odmiany na wielu przykładach liczebnych objaśnić należy.

207. *Uwaga.* Dajmy poznać Nauczyciele Uczniom swoim, że *Reguła trzech*, jest pewnym gatunkiem proporcji, w której z trzech wyrazów znalezien. Szukamy czwartego nieznajomego, co samo na przykładach jakich rachunkowych pokazać trzeba. Mnożenie nawet i dzielenie, do proporcji przyrównać można; bo w mnożeniu, liczby, mnożna, i mnożąca się średniami wyrażani i proporcji, jedność, jest pierwszym wyrazem proporcji, a liczba rozmnożona jest ostatnim wyrazem. Y tak na przykład: $4 \times 3 = 12$, rozłożyć można na proporcję następującą $1:4 = 3:12$. Wdzieleniu zaś, liczba dzieląca i wielokrotność średniami wyrażani proporcji: jedność jest wyrazem pierwszym, a liczba podzielna jest ostatnim wyrazem. Y tak na przykład $12:4 = 3$ albo $8:4 = 2$, rozłożyć można na proporcję następującą $1:4 = 2:8$. Więcej jeszcze takowych przykładów podać nie zawadzi.

208. *Twierdzenie r. fundamentalne.* Gdy w Tryskacie jakimkolwiek bokweden przedłużając go powiększymy, dwa, trzy, cztery, pięć i t. d. razy, i przez końce takie-

taki go prz. dłużenia poprowadzimy równoległe od boku drugiego aż do boku trzeciego także przedłużonego; zrobiając tym sposobem Trójkąty, których i inne dwa boki większe też będą od boków pierwszego Trójkąta, dwa, trzy, cztery, pięć it d. razy.

Nasch przykład będzie Trójkąt ABC, *Fig. 4* którego bok AB, tak przedłużymy, aby linia AD, dwa razy była większa od AB. Przez D, poprowadzimy DH równoległą od BC: Linia DH, dwa razy też większa będzie od linii DC, a linia AH dwa razy większa od linii AC.

Konstrucja. Przez punkt C, poprowadzimy CN równoległą od AB, kładąc spotkła w punkcie N, linią DN.

Dowod. Czworokąt BDNC, jest równoległobokiem: więc boki w nim przeciwległe są równe: to jest $BC = DN$ i $BD = CN$: a że $BD = AB$, więc i $CN = AB$. Kąty leżące przy A, i NCH są równe jako też kąty leżące przy C, ACB, AHD: a zatem Trójkąty ACB, CHN, dla równości kątów włożonych i boków AB, CN równych, mogą przysłać do siebie, i będzie $AC = CH$, a tym samym $AH = 2 AC$, to jest linia AH dwa razy większa od AC. Jest też i $BC = NH$, a tym samym $DH = 2 BC$,

2 BC, to jest linia DH dwa razy większa od BC. Weźmy znowu Linia AE trzy razy większą od AB, i poprowadźmy EI równoległą od BC. Podobnie jak wyżej dowieść będzie można, że też linia EI trzy razy jest większa od BC, a AI trzy razy większa od AC, co nie łatwo okaże się, ciągnąwszy linią HO równoległą od A E; bo dla równości kątów wszystkich, i boków AB, HO, Trojkąty ABC, HOI przystaną do siebie, a zatem $AC = HI$, i $BC = OI$. Aże $EO = DH$, a $DH = 2 BC = 2 OI$, więc $EO = 2 BC$, a zatem $EI = 3 BC$. Tak też i $AI = AH + HI = 2 AC + HI = 3 HI$.

Tymże sposobem dowodzi się, że jeżeli linia AF, cztery razy będzie większa od linii AB; Linia też FL równoległa od BC, cztery razy od niej większa będzie, i linia AL, cztery także razy większa od AC. i t. d.

209. Zagadn. 1. Podzielić daną linią na ilekolwiek części równych.

Niech na przykład będzie linia dana AG, którą podzielić mamy na 5. części równych.

Rozwiązanie. Od końca jednego na przykład A, linii danej AG, prowadzę drugą

[illegible]

Położenie w sprawie p. 13. Sądzie-
la, przy którym jest jeden cześnik po-
dane przysiadanie kłosać.

Dł. wielkość latwaśki, w przewo-
dzeniu równoległym, w obu rzędach natę-
pienego i w obu rzędach w równole-
głym natępieniu przyspieszenia dźwięku
dł. dźwięku: linia AB

Chocąc na przykład połączyć linią AB Fig. 5. na 5. rzucie trójkąta, prowadząc od siebie tej samej linii AC po bokach kołowych kątów, i oddającego kątów, prowadząc linię BD, otrzymamy rozwiązanie. Długość od punktu A do B i C, na pięć sześciu równych części i na

na takież pięć równych części od punktu B, dzieląc linią BD. Punkta podziałów równych w obydwóch liniach, łącząc ty-
 łaż równoodległymi; tę przerną linię da-
 ną AB w punktach podziału żądanego.

Prowadzenie tego nie różni się od po-
 przedziałowego. goryż w równoległoboku
 ACBD, uważać można jeden tylko Troy-
 kat. BAC, lub ABD; a zatem równość
 części. Linią AB, podobnie się, jak w
 pierwszym Twierdzeniu, dowiedzie. (p)

zro Twierdź 2. Dwa Troykaty row-
 nokątne, mają proporcjonalne boki prze-
 ciwne kątom równym.

Niech

(p) Rozdzielając tymże podobne Zagadnie-
 nie, niechay wprześcią Uczniowie na
 Figurę podobną, ale niech sami kreślą
 sobie podobną Figurę. i na niej rozwią-
 zują Zagadnienie. Figura podobna niech
 będzie tak do łatwiejszego wczyla-
 nia zrozumienia Pronozyty, którą gdy
 już dobrze zrozumieją, niechay sam-
 bręcej nawet książkę, na figurze
 obliczają od nich potrzebony podobę
 Nę widzieli, że to, co sądzili, dotę-
 dzie zrozumieć, i umieją się dobrze wy-
 tłumaczyć.

Niech będą dwa Trójkąty AGM i abc . Fig. 416.
w których kąty A i a , C i b . Mierzą rów-
no. Niech na przykład bok AG , będzie
pięć razy większy od boku ab ; będzie też
bok AM , pięć razy większy od boku ac .
Bok GM , pięć razy także większy od
boku bc .

Jakoż oddalwszy Linia AB , równa linii
 ab , i AC równa ac , i połączymy linią
 BC . Trójkąty ABC , abc , będą mogły
przebrać do siebie, a więcz równości kąty
 B i b , C i c będą równe. A że też kąty
 G i b , M i c są równe, więc równe także są
i kąty G i B , M i C ; a zatem linie BC , CM
będą równo oddalone. Przeto według pier-
wszego Twierdzenia, jeżeli AG jest pięć
razy większy od AB , czyli aa , będzie
też i AM pięć razy większy od AC , czyli
od cc . i GM pięć razy większy od BC
czyli od bc . Też samo mówićby się mo-
gło, gdyby dwa boki Trójkątów, prze-
ciwne równym kątom nie pięć, ale mniej
lub więcej częściowych razy, w sobie się
zamykały.

Gdyby zaś dwa boki w dwóch Tró-
kątach, przeciwne kątom równym, nie
zamykały się zupełnie jeden w drugim,
ale tylko raz, raz i pół z tych boków miał
w sobie 7, i kilku równych części, takich
drugi

drugi ma tylko 3; w takim razie inne też boki równym kątom przeciwne, w tychże Trojkątach nie zamykałyby się zupełnie jeden w drugim, atśleden skłacałyby się z takich części, z tarcen 3, składa się drugi. Tak na Figurze 7, gdzie Trojkąty ABC, abef, równokątne, i bokom AB, ab, taka długość dana, żeby bok AB, zamykał w sobie 7, części równych linii AD, a bok ad, taki 2 miał 3 tylko części równe linii A^o, albo ad; w tych Trojkątach poprowadziwszy linie DE, de, równopodstępnie od BC, bc; boki AC i ac, mieć też będą pierwszy 7, drugi 3, części równe linii AE, albo ae, a boki BC i bc, zamykać także będą pierwszy 7, a drugi 3, części równe linii DE, albo de. Toż mówić, gdyby boki dwóch Trojkątów, przeciwne kątom równym, więcej lub mniej części równych w sobie zamykały.

211. *Przetwarz.* W dwóch Trojkątach równokątnych, których boki porównywać z sobą mamy, dobrze jest wierzchołki kątów równych, naznaczać podobnemi literami. naprzykład. gdy nad wierzchołkiem kąta w jednym Trojkącie napiszemy litere A. napiszmy i nad wierzchołkiem kąta równego pierwszemu w drugim Trojkącie, litere a; gdy nad drugim kątem, w pierwszym Trojkącie będzie

dzie P. na
tamże
t.d. Tym
nym ko
dą pod
zatem e
przykład
różnaka
trzecia
go w
AB: ab
albo AC
ab: abc
bc =

212.
Trojkąt
równe,
kątów
będą rów

Niech
w tych
ab, i
cyoncin
a, ka
a, W
B.b, i
kow B
AB, a

dzie B, niech i nad drugim kątem równym
tamtemu w drugim Trojkącie leżącym, i
t.d. Tym sposobem boki przeciwne rów-
nym kątom w obydwóch Trojkątach, bę-
dą podzielnymi też liniami maszaczona; a
zatem gdy w Proporcji weźmiemy na-
przykład boki AB, ab, za leprzódki
Rozwiąz, za Następniaki względem gdzie po-
trzeba Joni AC, ac, albo BC, bc; i dla te-
go wszystkie te proporcje będą dobre;
 $AB:ab = AC:ac$, albo $AB:ab = BC:bc$,
albo $AC:ac = AB:ab$, albo $BC:bc = AB:ab$,
albo $AC:ac = BC:bc$, albo $BC:bc = AC:ac$.

212. Twierdzenie 3. Jeżeli we dwóch
Trojkątach, mają dwa kątówkowiśk ich
równe, i boki dwa około każdego z tych
kątów proporcjonalne; takie Trojkąty
będą równokątne.

Niech będą dwa Trojkąty ABC, abc, i
w tych kąty A i a równe, boki zaś AB,
ab, i AC, ac, około tych kątów propor-
cyonalne; to jest niech się ma tak $AB:ab = AC:ac$,
albo $AC:ac = AB:ab$, czyli $AB:ab = AC:ac$.
W takim razie będą też równe kąty
B, b, i kąty C, c, a zatem i boków
BC, bc, gdyżże ten sam co i boków
AB, ab, albo AC, ac,

Wy-

Tab. XII Wykreślenie. Na boku AB, weźmy linię AD, równą ab, i poprowadźmy DE równoległą od BC, i spotykającą AC w Punkcie E

Dowód. Troykąt ABC, ADE, są równokątne: więc (jak o tym w drugim Twierdzeniu dowiodło) $AB:AD$ (albo ab) $= AC:AE$. Aż $AB:ab = AC:ac$, więc $AE = ac$; a zatem Troykąt ADE, abc mogą przylegać do siebie; że zaś Troykąt ABC, ADE, są równokątne, więc równokątne także będą i Troykąt ABC, abc, a zatem, $AB:ab = BC:bc$.

213. *Twierdz. 4.* Jeżeli w dwóch Troykątach, trzy boki w jednym są proporcjonalne względem trzech boków w drugim, takie Troykąty będą równokątne.

Niech będą dwa Troykąty, ABC, abc, i boki w nich proporcjonalne, tak, że $AB:ab = AC:ac$, i $AB:ab = BC:bc$, te dwa Troykąty są równokątne.

Wykreślenie. Weźmy linię AD równą linii ab, i poprowadźmy DE równoległą od BC.

Dowód. Troykąt ABC, ADE są równokątne, więc $AB:AD$ (albo ab) $= AC:AE$.

Aż

Aże też iest $AB:ab \equiv AC:ac$

Więc $- - - AE \equiv ac$

Podobnie $AB:AD (albo ab) \equiv BC:DE$

Ażetoż iest, $AB: - - ab \equiv BC:bc$

Więc $- - - DE \equiv bc$

A zatem dwa Trójkąty ABE, abc wszystkie trzy boki mają sobie równe, i dlatego mogą przyślad do siebie, i są równokątne. Ażetoż są równokątne i Trójkąty ABC, ADE , więc równokątne także będą Trójkąty ABC, aac .

214. *Twierdzenie 5.* Niech będą dwa Trójkąty mające kąt jeden prosty, rozwarty, lub ostry równy w obydwóch Trójkątach, i niech stosunek ramion przy tych kątach będzie równy stosunkowi boków przeciwnych tymże kątom. Te dwa Trójkąty będą równokątne, byleby w trzecim przypadku, boki przeciwne kątowi ostremu większe były w obydwóch Trójkątach, niżeli ramiona po jednym lub po drugiej stronie przyległe temuż kątowi; albo chociaż te boki przeciwne mniejsze będą od ramion, byleby inny kąt w obydwóch Trójkątach był rozwarty

stwarty, lub ostry, który iedno ramie, ma spólne z kątem pierwszym, równym w obydwóch Troykatakach. Niechby na przykład były dwa Troykаты ABC, abc, w których kąty A i a, równe. i stosunek ramienia AC do ac, taki iaki, boku BC, do bc. Te dwa Troykаты będą równokątne.

Fig. 2. 1. Gdy kąty A i a, obadwa są proste.

Fig. 3. 2. Gdy kąty A i a obadwa są roztwarte.

Fig. 4. 3. Gdy kąty A i a obadwa są ostre, ale boki BC, bc, większe od ramion AC, ac.

4. Gdy kąty A i a obadwa są ostre ale boki BC, bc, mnieysze od ramion AC, ac: i kąty B i b, obadwa ostre, Fig. 4. albo obadwa roztwarte Fig. 5.

Wykreślenie poprzedzające. Weźmy Liniją AD, równą ac, i poprowadźmy DE równoodległą od BC.

Dowódz. Troykаты ACB, ADE są równokątne;

Więc $AC:AD$ (albo ac) $= BC:DE$

Ale też iest $AC:ac = BC:bc$

więc $DE = bc$
A za-

Azety
Fig. 1
ale też i T
kątne, wi
Troykаты

215. D
fokreśnyc
zraydnie i
choło ty
Figury na
similes.)

216. D
drenach
nie g ro
dwóch Ti
porecyonal
promocy
lanych wy
że Troyk
prostokreś
trzech bo

(g) Dla
iednym
czem
c oba
u oca
wygla
rozmag

A zatem dwa Trojkąty ADT , ach mogą przykładać do siebie, i są równokątne; aże też i Trojkąty ACD , ADE są równokątne, więc równokątne także będą i Trojkąty ACE , ach. (q)

215. Def. Gdy w dwóch Figurach prostokresłych równe sę kąty wszystkie znajdując iedne względem drugich, i boki około tych kątów proporcjonalne, takie Figury nazywają się podobnemi (Figurae similes.)

216. Uwaga. Po przytoczonych dowodzeniach Twierdzeń poprzedzających iasnieją rachaznie, że równość boków w dwóch Trojkątach, poczyta za sobą proporcjonalność ich boków, i wzajemnie proporcjonalność boków w dwóch Trojkątach wywodzi równość kątów w tychże Trojkątach. W innych zaś Figurach prostokresłych, które z więcej niż trzech boków są złożone, nie można z

rów-

(q) Dla Prócierza, różne te przypadki w iednym pou szczeniach zamienione do o-
czeniu; lepiej iednak będzie każdego z
ciobna przypadku osobno uczniom do-
wodzić, aby widlu razem okoliczności
wystawieniem, baczność ich nie była
roztargniona.

równości kątów we dwóch takich wielokątach, wność proporcjonalność ich boków, ani wzajemnie z proporcjonalności boków, wność równość kątów. Y tak kwadrat prostokątny, z kwadratem ukośnym, lubo mają boki proporcjonalne, nie mają jednak kątów równych. Dwa znowu prostokąty, nie różniące między sobą, co do kątów, ale i boków mogą być nierówne i całę nieproporcjonalne.

Trzeba iak wyjaśnieney i przykładowey wyłożyć Uczniom te trzy rzeczy, to jest: *Przystawanie, Równość i Podobieństwo* Figur.

Równość dwóch naprzykład Figur, ściągają się tylko do ich wielkości, nie zaś do ułożenia ich boków, albo gęnie w których się zamykają. I tak dwa Trojkąty, które, równe podługawy mają, i wysokości są sobie równe lubo ich boki, nie jednakowo mogą być ułożone, i większe iedne lub mnieysze od drugich. Dla tego też można znaleźć Trojkąt, lub kwadrat, równy Figurze prostokątney danej, iakżekolwiek liczbę iey boków będzie, i tychże boków ułożenie.

Podobieństwo ściągają się tylko do samej Figurę czyli ułożenia boków, nie zaś do wiel-

wielkość
Trojkąty
lubo ied-
nader m-
dobne, t-
wą liczb-
dnezy Fi-
giey. 3t-
tera co-
zamyka-
percyon-
tę pod-
i przy-
gi, a d-

Przy-
równość
ty przy-
fę w nie-
żona od-
ne. (r)

(r) Przy-
ięd /
Troj-
wodzi-
zad-
uic-
le na-
mna

wielkości. Dwie Figury, naprzykład dwa Troykaty mogą być do siebie podobne, lubo jeden będzie nader wielki, a drugi nader mały. Lecz aby Figury były podobne, trzeba imo. Aby miały jednakową liczbę boków. 2do. Aby kąty wiedney Figury były równe kątom w drugiej. 3to. Aby były odpowiedniące (lata correspondencia) to jest te, które zamykały w sobie kąty równe, były proporcjonalne. I tak dwa kwadraty zawsze są podobne jeden do drugiego, chociażby naprzykład bok jednego był na mile długi, a drugiego tylko na łokieć, lub na cal.

Przeobrażanie zamyka w sobie razem równość i podobieństwo. Dwie Figury aby przysłać do siebie mogły, trzeba, aby się w niczym nie różniły, tylko w tym, że na odmiennych miejscach są nakreślone. (r)

N

217.

(r) *Przetrząsnijmy Twierdzenia ściągające się do równości, i do podobieństwa Troykatów, łatwo otrzymujemy, że dowodzenia tam przytoczone zupełnie się zajądzą na tych, których nauka mówi o przybliżeniu Troykatów. Wzniele na tym znaczo, aby często przypominąć Uczniom sposob postępowania,*

BC, bc. Ale tak boki AE, eh, jak i boki.
BC, bc. są w proporcji z bokami DE, de,
wiel. i boki AE, eh, jak proporcjonalne bo-
kom DE, de, a z tym i Trojkaty ACD,
acd, będą podobne, i równe. Cierów-
ne, i boki okolo nich AE, DE: eh, de.
proporcjonalne: a wżeszęgi okoi katy.
ADE, adc, będą równe. Adz znowu i
katy E, e, są równe, wiel. i Trojkaty
ADE, ade, będą wzajemnie sobie równo-
kątne; a z tym podobne.

218. Uwaga 1. Dla dowiedzenia, że
Trojkaty ADE, ade, są podobne, nie trze-
ba było, że wykażemy, że proporcjonalno-
ści boków AE: eh, DE: de, nie ma; i wot by-
ło i nie pokazujemy wyraźnie, równości ką-
tów E, e, z tego o wykreśleniu; ponie-
waż katów E, e, ade, EAD, ead, mogła
być równość okazywać, z równości już
dowodzonej kątów AFC, afa, DAC, dac,
CAP, cab, wlinach Trojkatów: a tym
samym równości kątów E, e, wykażemy, że,
a z tym i podobieństwo Trojkatów AD
E, ade, byłoby dowiedzione.

219. Uwaga 2. Wiele na tym zawisło,
aby to dać poźriedz Uczeń, do gary we
dwóch Figurach podobnych, i znowu bę-
dą przekątnymi wierzchołki dwóch ką-

tów odpowiadających sobie, te przekątne mieć będą jednostajne stosunki, z bokami tych dwóch Figur; a za tym gdy w podobnych Figurach końce dwóch boków odpowiadających sobie złączemy przez przekątne; Troykąt, złożone z tych przekątnych i z dwóch boków należących do tych Figur, będą do siebie podobne.

220. Zagadn. 1. Mając dane trzy linie proste, na trzy pierwsze wyrazy proporcji, znaleźć linią czwartą proporcjonalną.

Wykreślenie. Zróbmy kąt jakikolwiek. Na dwa ramiona tego kąta, przeniesmy od wierzchołka jego dwie dane linie, mające służyć za dwa pierwsze wyrazy proporcji. Końce tych dwóch linii złączmy trzecią linią. Przeniesmy jeszcze podobnym sposobem i trzecią daną linią, na to ramie, na które już jest przeniesiona pierwsza linia proporcji. Od końca tej trzeciej linii, poprowadźmy aż do drugiego ramienia linią równoodległą od tej, która łączyła końce dwóch pierwszych linii. Linią zawartą między wierzchołkiem kąta i punktem, w którym ostatnia równoodległa przecina ramie

mie drugie
proporcjonalną

211. Z
fig. 123
także do
awie inu

Wykr
danej d
jakikol
tych dw
od drug
poprow
wierz.
dany jest

Złączm
przeciwn
trzecią.
końce, któ

(s) Co w
to za
chy trz
lucy co
te ram
na na

mie drugie, będzie czwartą linią proporcjonalną, której szukaliśmy. (s)

211. *Zagadn.* 2. Mało dana linia prosta, tak ją przeciąć, aby dwa jej odcinki tak się do siebie stosowały, jak się będą dwie inne dane linie.

Wyk. Linia. Od końca jednego linii danej do przecięcia, poprowadzimy pod jakimkolwiek kątem linią równą jednej z tych dwóch, k. tych danych linii, a od drugiego końca, w stronę przeciwną, poprowadzimy równoległą od pierwszego, równą drugiej linii, której także dany jest stosunek.

Złączmy końce tych dwóch linii w przeciwnych stronach poprowadzonych, linią trzecią, ta przecina linią daną w punkcie, którego szukaliśmy.

A'ho

(s) Co w *Arytmetyce* znaczy Reguła trzech, to znaczy w *Geometrii* *Zagadnienie*, aby trzy małe dane Linie proste, znaleźć czwartą proporcjonalną. Jest to w samej rzeczy Reguła trzech wykonana na liniach.

Albo tak. Od końca linii danej do przecięcia, poprowadźmy linię, która z nią czynią ką jakikolwiek. Na tę drugą linię, od wierzchołka kąta, przeniesmy jedną z tych linii, których dany jest stosunek: i od końca znowu tę ostatnią linię poprowadźmy drugą linię, równą drugiej, której także dany jest stosunek. Koniec tej ostatniej z końcem linii danej do przecięcia; i od tego punktu, gdzie się pierwsi spotkali, a tą drogą zaczynają, poprowadźmy równo odległą, która przecina linię daną do przecięcia, w punkcie żądanym.

Ten ostatni sposób postępowania, może być umiarkowanym i w innych rzeczach, gdzieby linia daną na większą część potrzebę, narysował na 3. 4. 5. i t. d. które także się miały do siebie, iak się mają 3. 4. 5. i t. d. linii danych. (t)

222. *Zagadn. 2.* Przedłużyć linię daną, tak, aby summa z tej linii i z iey przedłużenia tak się miała do samego przedłużenia, iak się mają do siebie dwie
inne

(t) *Takie zagadnienie jest tym samym w Geometrii, czym jest w Arytmetyce Reguła Spółki.*

inne linie
nie, któr

Wtore
linii dany
rę dany
dwóm lin
Przez ko
czniamy
z przed
trzech
żerka b
dwóch
miejsc
szukamy

223. Z
i linii d
Troszę

Spół
nego, i
czwarto
owa bok
proporc
danych.
ci tak T
by Tro

Społ
nej, p

inne linie dane; czyli, znaleźć dwie linie, których dana jest różnica i stosunek.

Wprowadzenie. Od ośmiu kątów linii danej, poprowadzić siedem prostych dole linie niewiadomej, i równych dwóm linijom, których dana jest różnica. Przez końce tych prostych, z każdego z ośmiu kątów linii danej, poprowadzić z przodużeniem linii danej, siedem prostych, wyprowadzić z każdego przedłużenia linii danej, i ośmiu kątów dwudzięć kątów, każdy kąt, będzie wyznikiem dwóch boków danych, których szukaliśmy.

223. Zadanie 4. Należy daną Trojkąt, i linię daną, wyznaczyć na tej linii Trojkąt podobny danemu.

Sposób 1. Dwóm bokom Trojkąta danego, i trzeciej linii danej, znaleźć czwartą proporcjonalną, i mieć będą dwa boki Trojkąta, którego szukamy, w proporcyi z dwoma bokami Trojkąta danego. Tymże sposobem wyznaczyć bok Trojkąta, który ma być podobny Trojkątowi danemu.

Sposób 2. Od dwóch kątów linii danej, prowadzić po jednej stronie dwie linie,

liniie, czyniące z nią dwa kąty równe dwom kątom Troykątą danego; te dwie liniie zeyściem się z sobą, zrobią z daną linią Troykąt podobny danemu.

Sposob 3. Linią daną przenoszę na bok którykolwiek Troykątą danego, tak, aby koniec ieden tey linii był na wierzchołku kąta, a drugi tam, gdzie przypadnie, lub na samym boku Troykątą. lub za nim, gdy liniia dana dłuższa będzie od boku Troykątą. Z końca tego drugiego, Linię daney prowadzę równoodległą od boku Troykątą przeciwnego kątowi, od którego pierwszą linią ciągnąłem, i tak dale to ją prowadzę, aż się zniydzie z trzecim bokiem troykątą danego, przedłużonym, gdy tego będzie potrzeba. Zrobi się tym sposobem Troykąt podobny danemu, i mający za podstawę, linią równą daney, który to Troykąt przerysować potym mogę na symey linii daney. (u)

224. *Zagadn. 5.* Na daney linii wykreślić iakakolwiek Figurę prostokreślną podobną Figurze daney.

Roz-

[u] Czeſte tego zagadnienia używanie, było pobudką do podanie kilku sposobów, któremi być może rozwiązane.

Rozwiazanie
boku kątów
kątów d
dzielię tak
tym na m
tronie 1/2
Troykątów
grze dan
tów. bę
które iz

225.
rozwiązanie
dany od
że używa
pół i m
leżące Fig
gich: i m
crey linii
położeniu
łączność

226. P
Troykąt
prostokreślny
go: to p
dwa inne
tym i row

Niech
tny w C

Rozw. 22. Na daney Figurze od końca boku któregokolwiek, prowadzę t. j. przekątnych do innych kątów, ile można, i dzielię tak Figurę daną na Troykaty. Potym na linii daney wykreślam po jednej stronie sposobem wyżej opisanym, tyle Troykatów podobnych, ile ich jest w Figurze daney. Wierzchołki tych Troykatów, będą wierzchołkami kątów Figury, której szukałem.

225. *Uwaga.* Między innymi sposobami rozwiązanія tego Zagadnienia, społ b podany zdaniem najlepszym: a to dla tego, że używając go, uchybienia, które popełnić można w położeniu linii, czyli Łoków Figury, nie zawisły jedne od drugich; i można uchybić w położeniu jednej linii, a nie uchybić tym samym, w położeniu drugiej: na co okazałoby się konieczność koniecznie mieć potrzeba.

226. *Podanie wzajemne.* (Lemma). W Troykacie prostokątnym, gdy spuścimy prostopadłą, od wierzchołka kąta prostego: ta prostopadła podzieli Troykat na dwa inne z pierwszym równokątne, a z tym i równokątne między sobą.

Niech będzie Troykat ABC prostokątny w C kąt spuszczony jest prostopadła CD

(D)



CD na przeciw prostkąną AB; Troykaty trzy: ABC, ACD, CBD są względem siebie równokątne.

Dowódz: Troykaty ABC, ACD, mają kąt spólny A, i kąty ACB, ADC proste, a zatem równe; trzeci przeto kąt wie-
dnym, będzie też równy trzeciemu ką-
towi w drugim. Są więc obadwa te
Troykaty, równokątne. Podobnie i Troy-
katy prostokątne ABC, CBD mają kąt
spólny B, i są także równokątne.

W Troykątach równokątnych ABC, ACD, mamy proporcya: $AB:AC = AC:AD$. w Troykątach: ABC, CBD będzie; $AB:BC = BC:BD$; a w Troykątach ADC, CDB; $AD:DC = DC:BD$. w Troyką-
tach, ABC, ACD, jest też i ta proporcya: $AB:BC = AC:CD$.

To jest 1. W Troykacie prostokątnym, bok jeden jest średnią Geometrycznie pro-
porcyonalnym, między przeciw prostką-
ną y odcinkiem tu przyległym, który
czyńi prostopadła.

2. Wysokość Troykata prostokątnego,
jest średnią Geo netrycznie proporeyonal-
ną, między dwoma odcinkami przeciw-
prostkatney,

3. Przeciwność kątów, dwa boki, i wychodzący z wierzchołka trójkąta prostokątnego, są w proporcji.

207. Zadanie 6. Miedzy dwiema danymi liniami, znaleźć średnią Geometryczną.

Sposób 1. Złączymy z sobą dwie dane linie, w jedną linię prostą; na niej jako na średnicy narysujemy półkole, i od punktu złączenia tych dwóch linii, wynieśmy prostopadłą aż do okręgu półkole. Ta prostopadła będzie średnią proporcjonalną, której szukamy.

Sposób 2. Na większej z dwóch danych linii, jako na średnicy narysujemy półkole. Na tej samej średnicy, od końca jej jednego, poprowadzimy drugą mniejszą linię daną, a od tego punktu, gdzie się na średnicy kończyć będzie, wynieśmy prostopadłą, aż do okręgu półkole, i punkt zetknięcia się z półkolem złączymy linią z punktem tym średnicy, od którego przedtem była linia mniejsza dana. Ta linia łącząca te dwa punkta, będzie średnią proporcjonalną, której szukamy.

ROZDZIAŁ IX.

O stośunkach powierzchni Figur prostokreślonych, w ogólności, a w szczególności o stośunkach Figur podobnych.

228. *Twierdź. I.* Gdy cztery linie są w proporcji Geometryczney: prostokąt z dwóch skrajnych, równy jest prostokątowi z dwóch średnich.

To Twierdzenie trzeba najprzód objaśnić na liczbach, jeżeli cztery liczby są Geometrycznie proporcjonalne, dwie skrajne rozmnożone jedną przez drugą, równe będą dwom średnim podobnie rozmnożonym. W każdej albowiem proporcji Geometryczney równość zachodzi między dwoma stośunkami Geometrycznymi, to jest tyle razy pierwszy poprzednik zamykać w sobie powinien swego następnika, ile razy i drugi poprzednik zamyka także następnika swego. Y tak na przykład w tej proporcji: $6 : 3 = 8 : 4$. iak 6, zamyka w sobie 3, razy 2, tak i 8 zamyka 4, razy 2. Ztąd wynika, że rozmnożenie skrajnych i średnich wyrazów proporcji, można oznaczyć, przez trzy ie-

dnakowe li
1000 wy
nych iako
nieważ 21
nyka w fo
7. a zatym
7. razy 4
3 razy 28
3 x 7 x 4

Podob
i tak 10
zamyka
to iak 1
icze zary
iako 12 x

Tak też
 $= 2 \times 28$
tak jest 35
 $30 = 28 \times$

W ogu
 $a : b = c$
iak, i c, 2
 $i c = n \times$
iako

Oliadn
prylinia
figuące

dnakowe liczby, a tym samym okazać równość wyrazów rozmnożonych, tak skrajnych iako i średnich. Na przykład, ponieważ $21:3 = 28:4$, i rownie 21. zamyka w sobie 3, iako i 28, zamyka 4, razy 7, a zatem tak $21 = 7$, razy 3, iako $28 = 7$, razy 4; więc 4 razy $21 = 4 \times 7 \times 3$; 3 razy $28 = 3 \times 7 \times 4$. A że $4 \times 7 \times 3 = 3 \times 7 \times 4$ więc i $4 \times 21 = 3 \times 28$.

Podobnie, ponieważ $16:12 = 20:15$ i tak 10 zamyka w sobie 12, iako 20, zamyka 15, razy 1; albo 4; a przeto tak $16 = \frac{4}{3} \times 12$, iako i $20 = \frac{4}{3} \times 15$; i znie zatem, że tak $15 \times 16 = 15 \times \frac{4}{3} \times 12$; iako i $12 \times 20 = 12 \times \frac{4}{3} \times 15$.

Tak też ponieważ $8:28 = 10:35$, i $8 = \frac{2}{7} \times 28$, a $10 = \frac{2}{7} \times 35$; i znie zatem, że tak jest $35 \times 8 = 35 \times \frac{2}{7} \times 28$; iako też $28 \times 10 = 28 \times \frac{2}{7} \times 35$.

W ogólności zaś mówiąc, jeżeli jest $a:b = c:d$; i tak a, zamyka w sobie b, iako i c, zamyka d, razy r; i znie $a = n \times b$, i $c = n \times d$, a zatem tak $d \times a = d \times n \times b$. iako $b \times c = b \times n \times d$.

Oświadczywszy to twierdzenie na wielu przykładach, przyfugi Nauczyciel do następującego dowodzenia.

Niech

Fig. 3. Niech będą dwa prostokąty: $ABCD$, $EDEF$, i boki jednego, AB , EC niech będą skrajnemi tej proporcji, której boki BD , BF drugiego prostokąta są średniami; to jest niechlię na; $AB: BF = BD: BC$, w takim razie te dwa prostokąty są równe.

Wykreślenie. Ustawmy tak te dwa prostokąty, aby w kątach dwóch przeciwnych przy B schodziły się, i przedłużmy boki ich DC , EF , aż do zeyścia się w punkcie G .

Dowód. Prostokąty: AC , BC (w) których jednakowa jest wysokość, mają się do siebie, jak ich Podstawy AB , BF . Prostokąty także BE , BG jednakowey wysokości, mają się do siebie, jak ich Podstawy; BD , BC . Aże z podania jest linia AD , do EF , jak linia $BD: BC$; więc też i prostokąt AC tak się ma do prostokątu EG , jak prostokąt BE do prostokątu EG ; czyli Prost. $AC: \text{Prost. } EG = \text{Prost. } BE: \text{Prost. } EG$, a zatem Prost. $AC = \text{Prost. } BE$, co samo krócey tak się wyraża.

AC:

(w) Prostokąty zwykły się wyrażać przez dwa linery, na końcach przeciwnych dwóch kątów napizane.

$$AC: EG = AB: BF$$

$$EE: EG = BD: BC$$

Aże $AB: BF = BD: BC$

więc $AC: EG = BE: BG$.

A zatem $AC = BE$.

220. *Wzajemność* (Reciprocity) albo *converso* dowód można. Jeżeli dwa prostokąty są równe; wznowimy dwa boki jednego za drugie, a dwa boki drugiego za średnie wyrosty proporcji, zasygnalizujemy między temi bokami proporcję.

W liczbach oczywiście się to pokazuje, bo gdyby boki dwa jednego prostokąta wyrażone były przez liczby: 10, i 42, a boki drugiego przez 15, i 28. Ciadwa te prostokąty zawierałyby w sobie 120, na przykład stop kwadratów, to jest byłoby: $10 \times 42 = 15 \times 28$. zkadby wypadała ta proporcja: $10:15 = 28:42$.

Wykreślenie Geometryczne do tego Twierdzenia służyć, nie odróżniałoby od poprzedzającego. Dowodzenie tak-
że

że wśródku dopiero działania różniłoby się; to jest: ponieważ.

$$AC: BG = AB: BF$$

$$i. BE: BG = BD: BC$$

A przez podanie / $AC = BE$.

$$więc AC: BG = BE: BG$$

$$A zatem AB: BF = BD: BC$$

230. *Wniośki 1.* Ponieważ w proporcyi, tenże sam być może następnik pierwszego stosunku, co i poprzednik drugiego; na przykład: $8: 4 = 4: 2$, albo; $8: 4: 2$, przeto kwadrat z średniej linii Geometrycznej proporcjonalnej, równa się też Prostokątowi z dwóch linii skrajnych; i znowu, jeżeli kwadrat równy jest prostokątowi, bok kwadratu będzie linią średnią proporcjonalną między bokami Prostokąta,

Te podania były wyłożone, w Rozdziałach szóstym, i ósmym, lubo sposobem odmiennym.

2. Można to samo przystosować i do równoległoboków, chociaż nie prostokątnych, byleby kąty jednego, równe były
kątom

jętem du
liczby
mianach d
z... tak
można iedr
dwadzie
liczby
w...
całkowit
następnych z
tego.

3. Przy
do równole
zamiast bok
stosunek czna
czoną od
drugi: tak d
boki będą r
kosc jednego
dwie linie
kosc drugie
proporcjonal
cztery linie
noległoboki

4. Jeżeli
można zaw
średnim. I
dwie średni
skrajnych,

łatem dwupięcio; także i do Trykatów,
i do trójkątów i pięciokątów; to jest ra-
miona ich ek to tego kąta są proporcjo-
nalne, tak, żeby można wziąć dwa ra-
miona jednego Trójkąta za boki, a
dwa drugiego za średnie, te dwa Trójkąty
będą sobie równe; i wzięcie to przed
wykaza, że dwie Trójkąty, są połowami
dwóch równoboków równokątnych,
niekiedy za boki ramiona tego kąta i ol-
nego.

3. Przyśrodkowanie to uczynić można, i
do równoległoboków i trapezów, które
zamiast boku jednego, w obawach, wy-
środek oznaczony przez prostopadłą, wy-
środek od końca boku jednego na bok
drugi; tak dalece, że te dwa równoległo-
boki będą równe, gdy Podstawa i wyśro-
dek jednego będą mogły być wzięte za
dwie linie skrajne, a podstawa i wyśro-
dek drugiego za dwie linie średnie
proporcjonalne; i wzięcie, jeżeli te
cztery linie będą proporcjonalne, rów-
noległoboki będą też równe.

4. Jeżeli cztery linie są w proporcji,
można zawsze odmierzyć miejsce dwóm
średnim, lub dwóm skrajnym, a nawet i
dwie średnie położyć na miejscu dwóch
skrajnych, lub skrajne na miejscu śre-
dniej.

dnich, nie psując proporcji: ponieważ przy takich oznaczeniach, prostokąt z średnicen równy jednakowo będzie prostokątowi z okrągłych.

231. *Twierdz. 2.* Gdy przez punkt iaki w kole, lub za kołem, poprowadziemy dwie linie, któreby okrag koła przecinały po obu stronach środka; prostokąt z dwóch części jedney z tych linii zawartych między tym punktem i okrągiem koła, będzie równy Prostokątowi z dwóch części drugiey linii zawartych także między tym punktem, i koła okrągiem.

Fig. 4. 1. Niech będzie w kole punkt A, przez który przeciętne są cięciwy BC, ED; Prostokąt $EA \times AD$ równy jest Prostokątowi, $BA \times AC$.

Wykreśl. Poprowadźmy linie, BD, EC.

Dowódz. Troykaty BAD, EAC są do siebie podobne, kąty ich albowiem w wierzchołku A przeciwne, są równe, i kąty B, E, (189) równe, iako obejmujące ramionami swemi tenże sam łuk CD. Będą więc boki tych Troykatów proporcjonalne: i $AB : AE = AD : AC$. a zatem $AB \times AC = AE \times AD$.

2. Niech

2. Niech będzie punkt V , za kołem, od *Fig. 5.*
tego punktu ciągniemy dwie linie AB ,
 AE , przecinając okrąg w B i C , i drugą w D . Prostopadłe $AB \perp AC$,
i $AE \perp AD$, będą równe.

Wykaż. Poprowadzimy linie BD , EC .

Dowodz. Trójkąty, BAD , EAC , mają
kąt A wspólny i kąty B i E równe, bo
wsparte ramionami tego samego łuku
 CD ; więc te trójkąty mają boki propor-
cyjne, t. j. $AB:AE = AD:AC$; a zatem,
 $AB:AC = AD:AD$.

To Twierdzenie zwykło się jeszcze i
tak wyrażać.

1. Jeżeli dwie cięciwy przecinają się
w kole, części ich są *inwersie* (inverse
also in ratione inversa), i proporcjonalne;
t. j. jeżeli jedna część jednej
cięciwy, do części drugiej drugiej, jak
się ma do części drugiej drugiej, do
drugiej części drugiej pierwszej.

Dwie rądy części cięciwy jednej, będą
środkami drugiej, a dwie części
cięciwy drugiej będą środkami tejże
proporcji.

2. Gdy, dwie linie przecinające koło, wychodzą od jednego punktu za kołem; są odwrotnie proporcjonalne z częściami temi, które za koło wychodzą; to jest, tak się ma jedna przecinająca do drugiej, jak się ma część drugiej za kołem, do części pierwszej także za kołem: jedna tedy przecinająca, i część iey za kołem są średniami w proporcyi, a druga przecinająca, i część iey także za kołem, są skrajnemi tej samey proporcyi.

322. Uwaga. W pierwszym razie. Gdy jedna z cięciw, jest średnicą koła, a druga do niej prostopadłą; ta prostopadła na dwie równe części będzie od średnicy podzielona; i prostokąt z dwóch części średnicy, będzie równy kwadratowi z połowy drugiej cięciwy. Prostopadła tedy spuśczone od każdegokolwiek punktu koła, na średnicę, jest średnią Geometrycznie proporcjonalną między dwiema częściami średnicy; który to przypadek szczególny, i wyżey już jest dowiedziony.

W drugim razie. Gdy jedna z linii zamiałyaby miała przecinać koło, jest styczną (tangens) ięgo, można ją uważać jak przecinającą koło, ale tak, że część iey w koło nieknie dla małości, i dwa iey punkta przecięcia schodzą się w punkt jeden.

W tym

W tym razie Prostokąt jeden, odmienia się na kwadrat z licznym. Y nadawanie to wielokrotność: jeżeli jest siódma tego punktu, wychodzący od niego, jedna trzecia koła, a druga siódma z kołem. Kształt ten jest ciałem równoległym, gdzie Prostokątowi z ciałem linii przecinał się. I z ciałem jest z kołem: czyli, to jest że licznym jest siódma geometryczna między całą przecinał się, i ciałem jest z kołem. Nie słabo. dowodzenie jest licznym: insynierze, i bardzo pod oczy podpałanie.

Niech będzie AD, sieczna. AB zaś przecinała koło, i od tegoż samego punktu A poprowadzona. Ta sieczna AD jest średnią geometryczną między przecinałą AB, i jej częścią, AC, z kołem. Fig. 6

Wskaz: Od punktu dotknięcia D, poprowadziny dwie linie DB, DC.

Dowód: Trykany: ALD, ADC. są do siebie podobne: mają albowiem spólny kąt A, i kąt odcinka, ADE. różny kątowi w odcinku na przemiennie AB.) (105) a zarys i trzeci kąt widzieliśmy. Trykacie równy i kątowi trzeciemu w drugim: będą więc tych trykaczów boki proporcjonalne, i $AB : AD :: AD : AC$, to jest kwadrat z licznym AD, równy będzie Prostokątowi z AB przez AC.

Fig. 7. 233. Wszczęgulności zaś niech będzie słyczna AT i przecinająca AD , od tegoż sam go punktu A poprowadzona, przez środek C , koła.

Poprowadzimy promień CT do punktu do kątów C; kwadrat z linii AC, równy będzie sumie kwadratów z AT, i CT, to jest: równy będzie sumie z Prostokąta AD przez AB, i z kwadratu BC. Zkąd wynika, że kwadrat, z którego średnicę BD, poprowadzimy na dwie równe części w punkcie C, i potwornie przełożeniu, weźniemy jakkolwiek punkt, na przykład A; prostokąt z całej tej linii (czyli przedłużenia AD z AB) z przynajm kwadratem, z połowy średnicy (BC²) równać się będzie kwadratowi z linii złożonej z połowy średnicy, i z jej przedłużenia (AC²) to jest będzie $AD \times AB + BC^2 = AC^2$.

234. *Zagad.* r. Mając dany Prostokąt, i kwadrat, znaleźć dwie linie, któreby tak się miały do siebie, iak się mają, ten Prostokąt i kwadrat.

Rozwiz. Zamieſhmę Proſtokąt dany na inny-temu równy, któryby za bok ieden, miał bok kwadratu; czyli (co na iedno wychodzi), ſzukamy cawartej linii proporcjonalney do boku kwadratu; i do dwóch

dwóch bokach
tak się mieści
proporcjonalnie
Profickąta

Te po-
tym, co li-
ce (ra kar-
ne przyk-
obli. sić

Wzię
mię, a
Przebie
Exanthe
rnia po
kwadran
zwiercia
tu, tak: 13
w tobie 4

235. A
sobem p
dwie lini
bie, iak fi
szukać be
ney do bo
boków d
tey prop
dran bok
maż po

dwóch boków Prostokąta. Bok kwadrata, tak się mieć będzie do tej czwartej proporcjonalnej, jak się ma kwadrat do Prostokąta.

To posępowanie zgadza się zupełnie z tym, co się już powiedziado w Arytmetyce (zakładzie 89. i 90.) aco tu przez różne przykłady, podobne sobie umocnił obściśić teżore należy.

Wziawszy bok kwadratu za jedną miarę, a bo za jedność, miechły bok jeden Prostokąta, zawierał w sobie 5 razy bok kwadratu, a drugi 7. razy. Czwarta linia proporcjonalna do boku tego kwadratu, i do dwóch boków Prostokąta, zawierałaby w sobie 35. razy bok kwadratu, tak: iako i cały Prostokąt, zawierany w sobie 35. razy cały kwadrat.

235. *Przystosowanie.* Podobnym sposobem postąpiemy sobie chcąc znaleźć dwie linie, któreby tak się miały do siebie, jak się mają dwa Prostokąty: to jest, szukać będziemy czwartej proporcjonalnej do boku jednego Prostokąta, i dwóch boków drugiego; do tej a bowiem czwartej proporcjonalnej tak się mieć będzie drugi bok pierwszego Prostokąta, jak się mają powierzchnie tychże Prostokątów.
Ale.

Możnaby to samo wykonać, szukając sposobem wyżej wyrażonym (234) sto-
funku każdego z dwóch Prostokąta, do
tegoż samego Kwadratu, znaleźlibyśmy
albowiem, że powierzchnie tych dwóch
Prostokątów tak się mają do siebie, jak
się mają dwie czwarte proporcjonalne
do boku kwadratu, i dwóch boków ka-
żdego z osobna Prostokąta.

Niechbyśmy naprzykład znaleźli, że
Prostokąt ieden, który nazywam P. za-
wiera w sobie kwadrat K, tyle razy, ile
razy linia L, zawiera w sobie bok B, kwa-
dratu; to jest: że $P:K = L:B$.

Niechbyśmy znowu znaleźli, że drugi
Prostokąt Q, zawiera w sobie ten sam
kwadrat K, tyle razy, ile razy linia M,
zawiera w sobie bok B tegoż kwadratu;
to jest: że $Q:K = M:B$. Wnoszę ztąd,
że Prostokąty P, Q, tyle razy zawierają
będą ieden drugi, ile razy się zawierają li-
nie L, M. iedna w drugiej, to jest: że
będzie, $P:Q = L:M$.

Jakoż jeżeli prostokąt P. zawiera w so-
bie kwadrat K. dwa, trzy, cztery, i t. d.
razy, a prostokąt Q. zawiera naprzykład
6. razy kwadrat K. Prostokąt pierwszy,
będzie do Prostokąta drugiego, jak się
licz-

liczby: 2.
też 1.
2. 3. 4. i
zawierać b
tak się ma
jak linia L.

Jeżeli t
P: K =
i Q: K =

W którą
przedni
tak się do
dniki drug

236. U
piero wyr
w drugiej
poprzedni
proporeye

Zkąd wyni

237. D
liczba iedna

liczby: 2, 3, 4, i t. d. do liczby: 6. A że też i linia L. zawiera w sobie bok, B. 2, 3, 4, i t. d. razy, więc też i linia M. zawierać będzie bok B, razy 6; a zarym tak się ma Prostokąt P, do Trojkatą Q, jak linia L, do linii M.

Jeżeli tedy mamy dwie proporcye; nap:
 $P : K = L : B.$
 i $Q : K = M : B.$

W których jednakowe są następniki; poprzedniki pierwsze obydwóch proporcyi tak się do siebie będą miały, jak poprzedniki drugie tychże proporcyi to jest
 $P : Q = L : M.$

236. *Uwaga.* Wiedney z dwóch dopiero wyrażonych proporcyi, naprzykład w drugiey można było odmienić mieysce poprzednikom, i następnikom, i te same proporcye tak wyrazić:

$$P : K = L : B.$$

$$K : Q = B : M.$$

Zkąd wynika. $P : Q = L : M.$

237. *Defin.* Gdy będą trzy jakiegokolwiek ilości jednakowego gatunku, stosunek pierwszy

szey z nich, do trzeciej nazywa się *stosunkiem składanym* (ratio composita) z stosunku pierwszey ilości, do drugiey, i drugiey do trzeciej. Ytak stosunek P do Q nazywa się składanym, z stosunku P do K, i K do Q. Tak też stosunek L do M będzie składanym z stosunku L do B, i B do M. Takie stosunki złożone z stosunków równych są równe. Itak ponieważ stosunek P do K, i K do Q równy jest pierwszy stosunkowi L do B, drugi stosunkowi B do M; będzie też i stosunek składany P. Q równy stosunkowi składanemu L do M.

238. *Przysł:* 1. To, co się tu powiedziało o stosunku składanym, dobrze będzie przytłosować do reguły trzech składaney, o której mówi o się w Arytmetyce.

Przykład. Rzemieślnicy z iednakową pilnością pracujący około iakiey roboty, tym więcej iey robią, im większa będzie ich liczba, i czas dłuższy strawiony na teyże robocie. Przeto gdy porównać chcemy dwie iednakowego gatunku roboty, któremi się dwie kupy Rzemieślników zatrudniały, trzeba rozmnożyć (iako się to już w Arytmetyce wyłożyło) liczby Rzemieślników przez liczby dni, przez które pracowali; a roboty przez tych Rzemieślników wygotowane, tak się będą do siebie miały, jak się mają tamte dwie liczby rozmnożone. Niech-

Niech
kół były
...
tek 2 do 3
liczb przez
ileż.e. iel
7: ró.wa
tę samę i cz
15: do 21.
równa sto
dnia sto
do 15:
równy iel
równy sto

Podobni
cey niż dw

239. P
lania o zar
mi zatrud
sadzaly się
lub więcej
bardzo lat
zi a.

240. P
działania
czayw
pod sto

Przy
ileż czyn

Aby znaleźć wartość 15. czerwonych złotych w groszach, zwyczajnie obracają się czerwone złote na złote, a te potem na grosze. Rozwiążem teraz to zadanie, składając je na stofunki pojedyncze, i szukając stofunku z nich złożonego; a to dla pokazania, że czasem i niemając o tym, używamy w samej rzeczy stofunku składanego.

Stofunek wartości 15. czerw: do wartości w groszach, składa się z stofunków następujących:

1. Wartość 15. czerw: zł. do wartości 1. czerw: zł. iest, iak 15 do 1.

2. Wartość 1. czerw: zł. do wartości 1. złotego - iak 18 do 1.

3. Wartość 1. złotego do wartości 1. grosza - iak 30 do 1.

4. Stofunek z tych trzech złożony iest iak 8100 do 1.

Więc 15. czerwonych złotych czyni groszy - 8100.

Przykład 2. Osoba 30 lat mająca, ileż minut żyła, rachując w Roku dni 365?

Stofunek 30 lat do jedney minuty składa się z stofunków, następujących:

Z Stofunku 30 lat do 1. roku, to jest,
30 do 1

Z Stofunku 1. roku do 1. dnia, to jest;
365 do 1,

Z Stofunku 1. dnia do 1. go-
dziny, to jest; - - - 24 do 1,

Z Stofunku 1. godziny do 1.
minuty, to jest; - - - 60 do 1,

Stofunek z tych wszystkich
składowy lat; - - - 15768000. do 1.

A razem wgo latach jest
15768000.

211. *Propoz. 4.* Widzieliśmy wyżej,
że do oznaczenia stosunku dwóch Prostokątów, trzeba było jeden z nich zerwać
na dwie części, krótszy miał bok równy bokowi
węższego Prostokąta, a bo (co najmniej)
wymagaloby się znaleźć czwartą
linię, nie porównaną do jednego boku le-
dniego Prostokąta, i dwóch boków dru-
giego: i że tak się ma pierwszy Prostokąt
do drugiego, jak się ma drugi bok pier-
wszego prostokąta, do tej czwartey linii
proporcjonalney. Zwyczajnie to poda-
nie tak się wyraża: że *stosunek dwóch Pro-
stokątów składa się z stosunków ich boków.*
Co też okazać można.

Niech

Niech będą dwa boki iednego Prostokąta nazwane, A i B, a dwa boki drugiego prostokąta, C i D. Szukaymy czwartey linii proporcjonalney trzem bokom B, C, D, i ta niech będzie L, to iest niech będzie, $B : C = D : L$, stosunek linii A, to iest drugiego boku pierwszego prostokąta, do L, równy będzie stosunkowi pierwszego prostokąta, do drugiego (235.) Aże stosunek A do L składa się z stosunków, A do D, i D do L; stosunek zaś A do D, iest stosunkiem boku iednego, iednego Prostokąta do boku drugiego, drugiego Prostokąta; a stosunek D do L, równa się stosunkowi drugich dwóch boków B i C. Łączy się; $B : C = D : L$ więc stosunek dwóch prostokątów, składa się z stosunków ich boków.

242. Przyśl. 5. Gdy dwa Prostokąty, które z sobą porównywać mamy, są kwadrata; ponieważ boki kwadratu są wszystkie równe, kwadrat ieden tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się ma bok ieden pierwszego kwadratu do trzeciego linii proporcjonalney z tym bokiem, i z bokiem drugiego kwadratu. Niech na przykład A i B, będą boki tych dwóch kwadratów, a C, niech będzie linia trzecia proporcjonalna do tych boków, kwadrat pierwszy tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się ma A do C.

243. D
fę z iedn
dwa csta
linia A do
tak iest
czerwone
biadnik i
wykładni
ków.

Niech
fę do f
tych kw
nym sto
ciau i
i z tym
nieb mie
z nich d
ney.

Jeżeli
siebie. i
dą, iak
cyonalna
z iest ten

Jako st
do trzec
nalney.
żnym sto

243. *Def'n.* Ten stosunek A do C, składa się z stosunku A do B, i B do C, jako zaś te dwa ostatnie stosunki są równe; bo kładziemy A do B, jak B do C, a to A: B: C, tak stosunek z nich złożony, nazywa się *dwumnożnym*. (Ratio duplicata) że wykładnik jego, jest kwadratem jednego z wykładników, dwóch pierwszych stosunków.

Niechby boki dwóch kwadratów miały się do siebie, jak 1. do 2: Powierzchnie tych kwadratów będą do siebie w tym samym stosunku, w którym jest 1. do 4; trzecia też linia proporcjonalna do 1. jest 2, jest 4; a zatem te dwa kwadraty tak się do siebie mają, jak się mają boki jednego z nich do trzeciej linii proporcjonalnej.

Jeżeli boki dwóch kwadratów będą do siebie, jak 2. do 3. powiększamy ich będą, jak 4. do 9; znowu też linia proporcjonalna do 2 i 3, jest $\frac{2}{3}$, a stosunek 2 do $\frac{2}{3}$ jest ten sam, co i stosunek 4 do 9.

Jako stosunek pierwszy na przykład linii do trzeciej *naprzemianowo* proporcjonalnej, nazywa się *trójmnożnym* dwumnożnym stosunku pierwszy linii do trzeciej; tak

tak znowu stosunek pierwszej tej linii do drugiej, nazwać można stosunkiem *dwudzielnym* (ratio subduplicata) stosunku linii pierwszej do trzeciej. Y tak gdy trzy linie przez liczby oznaczone: 1, 2, 4, są ciągle proporcjonalne, to jest 1 do 2, iak 2 do 4; albo 1:2; 4. Ponieważ pierwsza do trzeciej, to jest 1 do 4 jest w stosunku dwumnożym pierwszej do drugiej, to jest iak 1^2 do 2^2 ; będzie znowu 1. do 2. w stosunku dwudzielnym 1, do 4; to jest iak $\sqrt{1}$. do $\sqrt{4}$.

244. *Zagadn.* 2. Mając dany kwadrat jeden, znaleźć drugi, któryby do pierwszego był w danym stosunku.

Rozwiaz. Danemu stosunkowi znaydźmy inny równy mający za poprzednika bok kwadratu danego. Między tym poprzednikiem, i następnikiem jego, szukamy średniej proporcjonalnej, ta będzie bokiem kwadratu żadanego.

Albo tak: Złączmy wprost z sobą dwie linie, mające do siebie ten sam stosunek, który mają dwa wyrazy, naprzykład dwie liczby dane. Na tej linii z dwóch złożonej, iako na średnicy, nakreślmy połkołę, i od punktu ich łączenia tę wynieśmy prostopadłą, aż do okrągu. — Od punktu zey-

ścia

ścia tę prostopadłą z okręgiem popro-
wadzić ić ciele linie do dwóch kołców
środkowy, kwadraty tych dwóch linii, nadej-
ść do siebie jak bokowi kwadratu,
danego, rowną są z bokowi kwadra-
tu, którego szukamy. Jeżeli zaś pierwsza
nierówna jest bokowi kwadratu danego,
to trzeba na niej, zaczawszy od punktu
jej przecięcia z okręgiem, wyznaczyć
linią rowną bokowi kwadratu danego i
od punktu naznaczonego prowadzić rów-
noważną od średnicy, a ta rowna do niej
przecina drugą liniją w tym punkcie, któ-
ry wyznaczy długość linii kwadratu iu-
kanego.

To Zagadnienie przyśołowić należy do
przykładów Arytmetycznych.

Przykład. 1. Znaleść kwadrat, któryby
był $\frac{1}{4}$ kwadratu danego, to jest, któryby
takie miał do niego, jak 3, do 5.

Bok kwadratu danego dzielić na dwie
części, któreby tak się miały do siebie
jak 2 do 3. Następnie bok ten i śro-
dnicy kreślić półokręgiem od punktu p. dośro-
dka wycofne prostopadłą aż do tej spotkania się
z okręgiem. Od tego punktu spotkania pro-
wadzić linią do koła średnicy, w tę stro-

P

1.ę

ng, gdzie część iey większa znajduie się. Ta linia będzie bokiem kwadratu szukanego.

Przykład. 2. Maiac dany kwadrat dobrać mu drugi, któryby tak się miał do niego, iak 5, do 3.

Liniją równą bokowi danego kwadratu przeciągniemy daley, aż takich 5 części zamykać w sobie będzie, iakich 3 nieprzeciągnięta zamykała.

Na teyże linii tak przeciągnionej, iak na średnicy nakreśmy półkoło, i od punktu, od którego jest przedłużona, wynieśmy prostopadłą, aż do okrągu, i od tego punktu, gdzie go spotyka, poprowadźmy linię do końca tego średnicy, gdzie część iey równa się bokowi danego kwadratu. Ta ostatnia linia będzie wymiarem boku kwadratu, którego szukamy.

245. *Uwaga.* Rozwiązanie Arytmetyczne takowych zagadnień zasada się na wyciągnięciu pierwiastku kwadr towego.

Gdy na przykład znaleźć potrzeba kwadrat, któryby był $\frac{7}{9}$ kwadratu danego, to jest, któryby tak się miał do niego iak 3 do 5; różnmnożywszy obiedwie te liczby przez 5, będzie 3 do 5, iak 15 do

25; Wied
się nie
15 do 5
szukamy
go, iak
roznie
przez 5
iak pier
batedy w
z 15, i t
drugi sz
średnią
cwiema
dnie prze
15, pier
fzy.
Działan
jące do z
cyonalne
to samo.
pierwiast
ney; com
drugi pier
propyonal
równa się
słone roz
liczba zra
st k kwadr
dnej prze
Gdyśm
li kwadra

25: Więc kwadrat, którego szukamy tak się mieć będzie do kwadratu danego, jak 15 do 25, a takim bok kwadratu, którego szukamy, będzie co boku kwadratu danego, jak jest liczba, która przez siebie rozmnożona czyni 15, do liczby, która przez siebie rozmnożona czyni 25; to jest: jak pierwsi kwadratowy wy 15 do 5. Trzeba tedy w tym miejscu znaleźć kwadratowy z 15, i ten będzie właściwy bok kwadratu szukanego, to jest trzeba znaleźć średnią liczbę proporcjonalną między dwiema danymi, 3 i 5; rozmnożyć ją jednę przez drugą, i z tym mnożony liczy 15, pierwszy kwadratowy wyciągniesz.

Działanie więc Geometryczne zmierzające do znalezienia średnicy lub proporcjonalnej między dwiema danymi, jest to samo, co w Arytmetyce wyciąganie pierwiastku kwadratowego z liczby danej; co można i tym potwierdzić, że kwadrat liczby średniej Geometrycznej proporcjonalnej między dwiema innymi, równa się tymże dwóm liczbom przez siebie rozmnożonym; a zatem ta średnia liczba znajdzie się, wyciągając pierwiastek kwadratowy z tych dwóch liczb, jednej przez drugą rozmnożonych.

Gdyśmy wyżej Geometrycznie szukali kwadratu, któryby miał się do kwadratu

dratu danego w danym sfofunku, szuka-
liſmy przez wykreſlenie, ſredniej linii
Geometrycznie proporcjonalney międy
dwieſma w danym ſfofunku; będącemi, i
ta ſrednia liniia była bokię kwadratu
ſzukanego.

246. Przyſtoſować z łatwoſcią można
Podania dopiero wyłożone do innych ia-
kichkolwiek figur proſtokreſnych, i do
ſiebie podobnych. Pokaże ſię to nayprzod
na Proſtokątach podobnych, potym na
Troykątach, naofatak w ogulnoſci na
iakiſkichkolwiek figurach proſtokreſnych.

Gdy będą dwa Proſtokąty podobne, i na
ich dwóch bokach odpowiadających ſo-
bie zrobimy dwa kwadraty, te dwa Pro-
ſtokąty, tak ſiebie mieć będą, iak te dwa
kwadraty.

Tab.
XII.
Fig. 1.

Niech będą dwa proſtokąty podobne, ABCD,
abcd; ich powierzchni, tak ſię do ſiebie
mieć będą, iak ſię mają powieźchnie kwa-
dratów AB EF, ab ef, zrobione na bokach od-
powiadających ſobie; AB, ab. Jakoź Pro-
ſtokąt ABCD, tak ſię ma do kwadratu
AB EF, iak wyſokoſć AD do wyſoſci
AF = AB to ieſt:

$$ABCD : AB EF = AD : AB.$$

$$\text{Podobnie } abcd : abef = ad : ab.$$

Aż:

Aż dla podobieństwa prostokątów, jest
też $AD: AB :: ad: ab$. więc

$ABCO: ABIN :: abcd: abed$
albo, $ABCD: abed :: ABIN: abed$

To samo jeszcze wyłożyć można spo-
sobem następującym:

Niech dwie podstawy dwóch Prostokątów podobnych będą do siebie jak 5 do 3; wysokości ich i poprzeczki w takim samym stosunku 5 do 3; zatem niech i podstawy jednej podstawę ma 5, a drugą ma 3, równe części, wysokość także, jedną ma 5 części równych, a drugą ma 3 równe części; powierzchnie tych dwóch Prostokątów będą mogły być podzielone, pierwszy na 25, a druga na 9 części równych w obydwóch Prostokątach, tak jak też i kwadraty na tych samych podstawach zrobione mogłyby być podzielone, pierwszy na 25, a drugi na 9, równych kwadratów. Z tego wypływa, że i Trojkaty prostokątne podobne, tak się mają do siebie, jak kwadraty ich boków odpowiadających sobie, bo także Trojkaty są w samej rzeczy podzielane prostokątów podobnych, i mających też samę, co one, podstawę, i wysokość.

247. Można jeszcze przystosować to samo i do jakiegokolwiek Troykątów podobnych; ponieważ albowiem w podobnych Troykątach, wysokości są między sobą jak Podstawy, zatem prostopadłe, któreby miały tę wielkość podstawy i wysokości, co i Troykąty, byłyby podobne, i miałyby się do siebie w stosunku dwunnożnym ich boków, albo jak kwadraty ich boków odpowiadających sobie (246. więc i Troykąty, jako połowy tychże prostopadłych, będą do siebie w stosunku także dwunnożnym ich boków.

Jasniej to wyłożyć można, gdy stosunki boków wyrażone będą przez liczby.

Fig. 3. Niech będzie Troykąt jakiegokolwiek, którego podwielisz wszystkie trzy boki. Ten drugi Troykąt zmieści w sobie 4 Troykąty, z których każdy przystanie do pierwszego.

Jeżeli w tymże pierwszym Troykacie bok każdy potroimy, ten drugi Troykąt zamknie w sobie 9 Troykątów, z których każdy przystanie do pierwszego.

Jeżeli znowu każdy bok w pierwszym Troykacie tak przedłużemy, żeby dłuższy był

był był
kat pon
Troykąt
wizę.

Przeło
zawierają
boki i
chnia pi
dzie po
36, 49.

Pod
które
8.9. -
zawierają
kwadratu
81. - -

Główny
bnych m
5. do 7
umieszc
Troykąt
przech
w trzech
byłby
jak pow
rych bok

Najd
spółob

był był 4, 5, 6. i t. d. razy; ten drugi Troj-
kąt pomiesci w sobie, 1, 25, 36. i t. d.
Trojkątów, mogących przytkać do pier-
wszego.

Przeto, jeżeli boki Trojkąta jednego
zawierają w sobie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 .. razy
boki innego Trojkąta; powierzch-
nia pierwszego Trojkąta zawierać bę-
dzie powierzchnią drugiego, 1, 4, 9, 25,
36, 49, 64, 72, 81. -- razy.

Podobnie, powierzchnie kwadratów,
których boki zawierają 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
8, 9. -- razy bok innego kwadratu, będą
zawierać powierzchnią tego drugiego
kwadratu, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 72,
81. -- razy.

Głowy boki dwóch Trojkątów pod-
bnych między sobą przykład do siebie, jak
5, do 7: można by w pierwszym Trojkacie
umieścić 25, a w drugim, 49 równych
Trojkątów, których wszystkich boki
przytkały mogły do siebie; a zatem po-
wierzchnie tych dwóch Trojkątów mia-
łyby się do siebie, jak 25, do 49: to jest
jak powierzchnie dwóch kwadratów, któ-
rych boki byłyby do siebie jak 5, do 7.

Nakoniec, można tego samego dowieść
spółobem podobnym, iakośmy dowodzi-
li,

li, że kwadraty mają się do siebie w stosunku dwumaożnym ich boków. (242)

I tak, gdy będą dwa jakiekolwiek Trójkąty podobne, do których dwóch boków odpowiadających sobie, znajdziemy trzecią linią, ciągłą proporcjonalną; powierzchnia jednego Trójkąta, tak się mieć będzie do powierzchni drugiego, jak bok pierwszego Trójkąta, który wzięty jest za pierwszy wyraz proporcji, do tej trzeciej linii proporcjonalnej.

Fig. 4

Niech będą dwa Trójkąty podobne, ABC, abc, znajdziemy AD trzecią ciągłą proporcjonalną do boków AB, ab, i tę samą AD przeniesmy na linię AB od A do D. Powierzchnia Trójkąta ABC, będzie do powierzchni Trójkąta abc, jak AB do AD.

Wykreślenie. Poprowadźmy linią CD.

Ponieważ dla podobieństwa Trójkątów jest: $AB : ab :: AC : ac$, a przez wykreślenie $AB : ad :: ab : AD$, będzie więc; $AC : ac :: ab : AD$. a zatem Trójkąty cab, CAD, mają kąty A i a równe, i ramiona około tych kątów na obojstron proporcjonalne; będą tedy te dwa Trójkąty równe co do powierzchni; a przeto

stosunek
nich ze
tegoż Tr
równy i
AD, wię
mieć bę
AB do h
mnożny

Idzie
bobre
czuam
kie r
zamyska

248.
dnie co
asc, si
żyma i
furek d
funa w
ieft: że
farków
pokazał
fiska a y

Jako
ści ciąg
ge trzy
b, c, i
Stoim
stosunek
C = a:

stożunek Troykąt ABC, do każdego z nich będzie identyczny. A że stożunek tegoż Troyką ABC, do Troyką ADC, równy jest stożunkowi linii AB, do linii AD, więc też i Troyką ABC tak się mieć będzie do Troyką ADC, jak linia AB do linii AD; to jest w stożunku dwumnożnym boków AB, AD.

Idzie ztąd, że i równoległoboki podobne są także między sobą; w stożunku dwumnożnym ich boków: ponieważ także równoległoboki dwa razy w sobie zamykają Troykąy podobne.

248. Można także było równie dokładnie dowieść, że Troykąy podobne ABC, acd, są między sobą w stożunku dwumnożnym ich boków AC, ac; a zatem, że stożunek dwumnożny AB do ac, równy jest stożunkowi dwumnożnemu AC, do ac; to jest, że stożunki dwumnożne z równych stożunków, są równe; co też już ogólnie pokazało, mówiąc wyżej o stożunkach składowych z innych stożunków.

Jakoż, niech będą trzy jakiekolwiek ilości ciągło proporcjonalne: A, B, C, i drugie trzy ciągło także proporcjonalne; a, b, c, i w równym z pierwszemi stożunku. Stożunek składowy A do C, równy będzie stożunkowi, składowemu a do c, to jest; $A : C = a : c$.
Bo

Bo, ponieważ stosunek A do B równy
wzieliśmy stosunkowi a do b, będzie.

$$A : B = a : b; \text{ Aże } A : B = B : C$$

$$\text{ i } a : b = b : c$$

$$\text{Więc } B : C = b : c$$

$$\text{azatym } A : C = a : c$$

W liczbach to samo iśniej się oka-
zuje.

Niech będą trzy liczby ciągle propor-
cyonalne 8, 4, 2, i drugie trzy ciągle tak-
że i równie proporcjonalne; 12, 6, 3,
będzie; $8 : 4 = 12 : 6$.

Ponieważ albowiem równe są stosunki 8
do 4, i 12 do 6, będzie.

$$8 : 4 = 12 : 6; \text{ Aże, } 8 : 4 = 4 : 2.$$

$$\text{ i } 12 : 6 = 6 : 3.$$

$$\text{Więc } 4 : 2 = 6 : 3$$

$$\text{Azatym } 8 : 2 = 12 : 3.$$

249 *Podanie przybrane.* Gdy mamy
iakiżkolwiek zbiór stosunków równych,
których

którego wyrazy wszystkie jednakowego
są pata są: Summa wszystkich poprze-
dników, tak se mieć będzie do summy
wszystkich następników, tak każdy w
szeregowości poprzednik, do swego następ-
nika.

Bc. jeżeli każdy z osobna poprzednik
dwa, trzy, cztery i t. d. razy, zamyka'w
sobie swego następnika, wszystkie t. ż
razem poprzedniki zamykać będą wszyst-
kie razem następniki dwa, trzy, cztery i
t. d. razy: a zatem summa wszystkich po-
przedników, tyle razy, zamykać będzie
summę następników. ile każdy z osobna
poprzednik, swego następnika,

I tak nich będą równe te sumki, 64 do
32: 50 do 25: 42: do 21: 32 do 15: 24 do
12: 18 do 9: 10 do 5: 8 do 4: 6 do 3: 4 do
2: 2 do 1. Summa wszystkich poprzedni-
ków = 258, a summa wszystkich następ-
ników = 129: iedzie tedy, 258: 129
= 64: 32; albo = 50: 25; albo = 42: 21
i t. d.

250. *Twierdzenie. 3.* Jakikolwiek są
Figury prostokątne podobne, zawrze te
do siebie będą w stosunku do umnożnym
boków odpowiadających sobie.

Wy-

Fig. 5. *Wykreśl.* Od wierzchołków dwóch kątów odpowiadających w obydwóch figurach, poprowadzmy przekątne do innych kontów, do których mogą być poprowadzone.

Dowodzenie. Dwie te figury będą podzielone na Troykątę, które z osobna brane w iedney figurze, będą podobne Troykątom odpowiadającym w drugiej figurze. Każdy zaś wszczegulności Troyką w iedney figurze, będzie do Troykąta odpowiadającego sobie w drugiej figurze w stosunku dwumnożnym boków odpowiadających; wszystkie tedy Troykąty, z których się składa jedna figura, będą poprzednikami, a wszystkie troykąty pierwszym odpowiadające, z których się składa druga figura, będą następnikami tamtych; a zatem summa wszystkich Troykątów, które składają iedną figurę (to jest ta cała figura) tak się mieć będą do summy wszystkich Troykątów, z których się składa druga figura (to jest do tey drugiej całej figury) iak się ma każdy wszczegulności Troyką w iedney figurze, do Troykąta odpowiadającego w drugiej figurze; to jest w stosunku dwumnożnym boków odpowiadających w tych dwóch figurach.

Wszyst-

Wszyst
działo o fi
spółnie z
się miały
że być p
figur prof

251. A
biejacob
podobny
ba tym
próbkę
boki co
rach ca
kątra te
powia
my.

252. C
cyą, i
cyd. i
kierow
drugie
zręczy
podobn
pierwszy
wi dca
pierw
drugich
dwóch

Wszystko zatem, cokolwiek się powie-
działo o stosunku dwóch kwadratów i o
sposobie znalezienia kwadratów, któreby
tę miały do siebie w danym stosunku, mo-
że być przyświecane do jakichkolwiek
figur prostokreślnych podobnych.

251. Aby Figurę jaką prostokreślną zro-
bić podobną i równą danym dwóm innym
podobnym figurom prostokreślnym, trze-
ba tym końcom postawić Trójkąt
prostokątny, dawczy mu za ramiona dwa
boki odpowiadające sobie w dwóch figu-
rach danych podobnych, a przeciwprost-
kątna tego Trójkąta, będzie bokiem od-
powiadającym w figurze, której szuka-
my.

252. Gdy cztery linie składają propor-
cyę, i ta dwóch pierwszych, wyrażają-
cych jeden stosunek, zrobimy dwie na-
kiekolwiek figury podobne, a z dwóch
drugich, wyrażających drugi stosunek,
zrobimy inne dwie jakiegokolwiek figury
podobne; w takim razie stosunek dwóch
pierwszych figur, równy będzie stosunkowi
dwóch drugich, bo tak stosunek dwóch
pierwszych figur, jest o i stosunek dwóch
drugich, jest stosunkiem dwóm moczonym z
dwóch równych stosunków.

Prawdzi

Prawdzi się to wszczegulności, gdy wszystkie cztery figury są sobie podobne; a tym widoczniey jeszcze się okazuje, gdy te cztery figury są kwadratami.

253. Mając dwie proporcye, których wyrazy wszystkie są liniami, Prostokąt z poprzedników dwóch pierwszych stosunków, w każdej proporcji tak się mieć będzie do Prostokąta z dwóch ich następników, iak Prostokąt z poprzedników, drugich dwóch stosunków do Prostokąta z ichże następników.

Należy to objaśnić nayprzod na przykładach liczebnych, pokazując, że gdy będą dwie proporcye w liczbach wyrażone, poprzedniki dwóch pierwszych stosunków, w obydwóch proporcjach, jeden przez drugi rozmnożone, tak się mieć będą do swoich następników przez siebie także rozmnożonych; iak i inne dwa poprzedniki, jeden przez drugi rozmnożone, do swoich następników podobnie rozmnożonych.

Przykład. Niech będzie: $14 : 7 = 6 : 3$.

i znowu $15 : 5 = 12 : 4$.

będzie też $14 \times 15 : 7 \times 5 = 6 \times 12 : 3 \times 4$.

to jest. $210 : 35 = 72 : 12$.

To

To co na
cznie się p
rozumowan
Jeżeli poprz
jest dwa raz
go następn
proporcji,
kiedy od s
rozmnożyw
pierwszej
poprzedni
nik z tych
dwa razy
od następ
ków pier
cyach roz
poprzedni
gi trzy razy
ków, więc
dwóch pie
mnożony,
drugich roz
większy od
rozmnożon
przytłowa
go wykładu

Niech i
cztery lini
cyą. i niech
gie cztery

To co na liczebnych przykładach widoczne się pokazuje, trzeba jeszcze twierdzić rozumowaniem pod tym następującem: Jeżeli poprzednik w pierwszej proporcji jest dwa razy naprzykład większy od swego następnika, a poprzednik w drugiej proporcji, trzy razy naprzykład jest większy od swego także następnika; tedy rozmnożwszy pierwszego poprzednika, pierwszej proporcji, przez pierwszego poprzednika drugiej proporcji, poprzednik z tych dwóch rozmnożony, będzie dwa razy t. j., to jest sześć razy większy, od następnika podobnie z dwoma następnikami pierwszych, w obydwóch proporcjach rozmnożonego; a że i drugie dwa poprzedniki, są, jeden dwa razy, a drugi trzy razy, większe od swoich następników. więc tak pierwszy poprzednik, z dwóch pierwszych poprzedników rozmnożony, jak i drugi poprzednik z dwóch drugich rozmnożony, będzie sześć razy większy od swego następnika podobnie rozmnożonego; które to rozumowanie przytłosować można i do każdego innego wykładnika.

Niech litery A, B, C, D. wyrażają cztery linie składające pierwszą proporcję, i niech litery a, b, c, d wyrażają drugie cztery linie składające drugą proporcję

cyą

cyą; to jest: niech będzie; $A : B = C : D$.
i $a : b = c : d$; Lędzie też $A \times a : B \times b =$
 $C \times c : D \times d$.

Bor nayprzod $A : B = Aa : Ba$.

i podobnie $C : D = Cc : Dc$.

Aże - $A : B = C : D$.

Więc - $Aa : Ba = Cc : Dc$

Takież znowu; $a : b = Ba : Bb$.

$c : d = Dc : Dd$.

Aże - $a : b = c : d$

Więc - $Ba : Bb = Dc : Dd$.

Stofunek tedy złożony z stofunków:

$Aa : Ba$.

i $Ba : Bb$.

To jest stofunek $Aa : Bb$, równa się sto-

funkowi złożonemu z stofunków

$Cc : Dc$.

i $Dc : Dd$.

To jest stofunkowi, $Cc : Dd$.

albo co na iedno wychodzi; $Aa : Bb = Cc : Dd$.

254

waśe W
regulare.

255

stkie ra
od liczi
stkie ka
iednego
liczby
idzie, że
maise li
kie ma
wiec do
przyto
ogulnoś
działo,

Wiem
kafa rów
daney, w
równoboc

W pita
noscocne

ROZDZIAŁ. X.

O wielokątach foremnych.

254. **Dzieli.** Gdy wielokąt ma wszystkie boki i kąty równe, nazywamy go *Wielokątem foremnym* (Poligonom regulare.)

255. **Wniosek.** Ponieważ ważność wszystkich razem tych twierdzeń zależy o od liczby boków tegoż wielokąta, ważność jednego z tych twierdzeń, zawisła tylko od liczby boków tegoż wielokąta. Zgad idzie, że wielokąty foremne, jednakową mając liczbę boków, kąty też wszystkie mają równe i ości podobne, i są więc do siebie podobne. Można tedy przystosować im to wszystko, co się w ogólności o figurach podobnych powiedziało.

Wiemy już sposób wykreślenia Trójkąta równobocznego i kwadratu na linii danej, wiemy też jak wpisać w Trójkąt równoboczny, lub na nim opisać koło.

Wpisanie w koło dane, Trójkąta równobocznego, i opisanie tegoż koła Trójkątem

Q

kątem

kątem, łatwiej się wykonywa przez wykreślenie *Sześciokąta foremnego* (Hexagonum.)

256. *Twierdz:* 1. Bok sześciokąta w koło wpisane, równy jest promieniowi tegoż koła.

Tab. XV Niech będzie ABCDEF sześciokąt foremny, w koło wpisany; bok którykolwiek tego sześciokąta na p: AB, równy jest promieniowi SB tegoż koła.

Wykreślenie. Poprowadzmy promień SA.

Dowódz. Kąt ASB, zamyka szóstą część, czterech kątów prostych; to jest $\frac{2}{3}$ jednego kąta prostego; aże trzy kąty *Trojkąta* ASB, składają dwa kąty proste, więc dwa kąty A i B tegoż *Trojkąta*, razem wzięte są różnicą między dwoma kątami prostymi i $\frac{2}{3}$ jednego kąta prostego, to jest czynią $\frac{4}{3}$ kąta prostego. Ponieważ zaś te dwa kąty są sobie równe, więc każdy z nich będzie $\frac{2}{3}$ kąta prostego: a zatem wszystkie trzy kąty *Trojkąta* ASB są równe. i dla tego też i boki wszystkie trzy równe będą. Będzie tedy bok AB, sześciokąta foremnego (czyli sześcioramniowego) równy promieniowi koła opisanego.

257. *Wniosek 1.* Aby więc wpisać sześciokąt foremny w koło dane, dość jest przemieścić 6 razy jako cienciwę promień tego koła, na okrąg jego.

258. *Wniosek 2.* Pobrowadziwszy linię AC , będzie ona cienciwą trzeciej części okrągu koła, a zarazem będzie bokiem *Trojkąta* równobocznego wpisanego w dane koło. Pomagając tedy linie AE , CE , *Trojkąt* ACE będzie *Trojkątem* równobocznym w koło wpisany.

259. *Twierdzenie 2.* Gdy wkoło wpisany będzie *Trojkąt* równoboczny, a przez wierzchołki kątów jego, pociągniemy styczne z kołem tak daleko, aż się z sobą zniżyda, te styczne zrobią *Trojkąt* równoboczny na kole opisyany.

Niech będzie ABC *Trojkąt* równoboczny wpisany wkoło $SABC$: przez wierzchołki A, B, C tego *Trojkąta* prowadzone styczne koła, aż do spotkania się ich z sobą w punktach D, E, F , zrobią *Trojkąt* równoboczny na kole opisyany. Fig. 2.

Wykreślenie. Pociągniemy promienie SA, SB, SC .

Dowód: Którykolwiek z kątów w środku koła, naprzekąd kąt ASB , i temu Q 2 prze-

przeciwny kąt E, między dwiema stycznymi zawarty, czynią razem dwa kąty proste. Aże kąty wszystkie trzy w środku koła są równe, więc równe będą i kąty trzy od stycznych zrobione; a zatem i Trojkąt DEF będzie równoboczny.

Łatwo więc opisać można dane koło Trojkątem równobocznym, wpisawszy pierwej w toż koło Trojkąt także równoboczny.

260. W ogulności zaś mówiąc: niechby był iakikolwiek Wielokąt foremny w koło wpisany; jeżeli przez wszystkie wierzchołki kątów tego Wielokąta poprowadziemy styczne koła, tak, aby każde dwie bliskie z sobą się spotykały; Wielokąt, który z tych stycznych zrobi się, będzie także foremnym.

Dowodzi: We wszystkich czworokątach takich iak na przykład ASBE, kąty między dwiema stycznymi zawarte, iak na przykład kąt E, będą równe; a zatem wszystkie kąty tego Wielokąta będą równe.

Wszystkie także Trojkąty, iak na przykład ABE będą równoramienne, i kąty w jednym Trojkącie, równe będą kątom w drugim, i podstawy w nich, iak

1.a-

naprzyk
a zatem
przytacz
Trojkąta
Węzłom
ków iedn
bok naprz
kich równ
go, więc
ta równe

261.
foremnym,
gie koło
spolny mi

Nech b
remny, A
weń koło
dwa koła b
centrici.)

Dowodzi:
bliskim, na
dziwizy dw
S przecięt
gly od trz
B, C (wed
o opisanu
równe lini
kąty SBC)

naprzykład: jest podstawa AB będą równą;
a zatem wszystkie te Trójkąty mogą
przytnąć do siebie, i ztąd boki jednego
Trójkąta równe będą bokom drugiego.
Więc summa dwóch takich równych bo-
ków jednakowa zawsze będzie. Aże
bok naprzykład EF jest summa dwóch ta-
kich równych boków Wielokąta opisanego,
więc wszystkie boki tego Wieloką-
ta równe będą.

261. *Twierdzenie 3.* W każdy Wielokąt
foremny, można wpisać jedno koło, i drugie
koło na nim opisać, a obadwa te koła,
spójny mieć będą środek.

Niech będzie jakiegokolwiek sześciokąt fo-
remny, $ABCDEF$, można zawsze wpisać
weń koło, i drugie na nim opisać, a te
dwa koła będą *spółśrodkowe*. (*circuli con-*
centrici.)

Dowód. Od środka dwóch boków *Fig. 3.*
bliskich, naprzykład od G , i H , wyprowa-
dziwszy dwie prostopadłe: GS, HS ; punkt
 S przecięcia ich, jednakowo będzie odle-
gły od trzech wierzchołków bliskich A ,
 B , C (według tego co się już powiedziało
o opisanu kołem Trójkąta) będą tedy
równe linie AS, BS, CS ; a zatem Tró-
kąty SBC, SBA równe względem siebie
boki

Boki mieć będą, i jeden Troykat przyśtać może do drugiego; a w szczególności kąt SBC, równy jest kątowi SBA, i każdy z nich czyni połowę kąta w wielokącie, to jest kąta ABC. A że też równe są i kąty SCB, SBC, więc i kąt SCB, będzie połową kąta w Wielokącie, a zatym kąt SCD, będzie drugą jego połową. Mają więc Troykаты: SCD, SCB spólny bok: SC; równe boki: CD, CB, i kąty w C między nimi zawarte, równe. Mogą tedy i te dwa Troykаты przyśtać do siebie; a w szczególności linie SB, SD równe będą. Węć to koło, którego środkiem jest S, i które przechodzi przez punkta bliskie: A, B, C, przechodzi także będzie i przez punkt następujący: D. Podobnym sposobem pokazać można, że toż koło przechodząc przez punkta: B, C, D, przechodzić będzie i przez punkt E. i t. d.

Wszystkie promienie: SA, SB, SC, SD, i t. d. dzielą w wierzchołkach na dwie równe części, kąty Wielokąta, iako się pokazało; a zatym dwa Troykаты naprzykład SBH. SBG, mogą przyśtać do siebie, bo mają kąty proste przy H i G, bok spólny: SB, i kąty przy B równe; a w szczególności linie SH, SG są równe; toż samo możnaby dowieść i względem innych prostopadłych spuszczonech od środka S, na

na boki
jednako
Wielokąta
kiedyby w

261.
remy w
dwie rów
jest bok t
żdego t
wszy lin
się z ty
le dwol

r. W
kąta będą
łowy luk

2. W
będą rów
raz w
kątown
słabie m
promieni

Ten t
słabie bok
dzie for

Podol
że i cze

na boki wielokąta. Punkt tedy S. iest jednakowo odległy od wszystkich boków Wielokąta, a zatem iest środkiem koła, któreby wpisać można w Wielokąt.

262. *Twierdź. 4.* Mając Wielokąt foremny w koło wpisany, a przeciąwszy na dwie równe części łuk, którego cięciwą iest bok tego Wielokąta, i od punktu każdego takiego przecięcia poprowadziwszy linie do dwóch końców łuku, zrobi się z tych linii inny wielokąt foremny, tyle dwoje co pierwszy boków mający.

1. Wszystkie boki tego nowego wielokąta będą równe, bo będą cięciwami połowy łuków równych.

2. Wszystkie także kąty tego Wielokąta, będą równe, bo każdy z nich będzie dwa razy większy od kąta przypadającego Troykąm równoramiennych, i przyśtać do siebie mogących, które za boki, mają promienie koła.

Ten tedy Wielokąt, będzie miał wszystkie boki i Troykąty równe, a zatem będzie foremnym.

Podobnym sposobem dowieść można, że jeżeli boki Wielokąta, są cięciwami tyluż

tylnż części koła, ile Wielokąt ma boków. ten Wielokąt będzie foremnym; a zatem wykreślenie Wielokąta foremnego, któryby zamykał w sobie pewną liczbę boków danych, zależy od tego, aby podzielił okrąg koła na daną liczbę części równych.

263. *Zagadn.* Na danym kwadracie opisać, i wpisać weń koło; i znowu w dane koło wpisać, i opisać na nim kwadrat.

Rozwiąz. 1. Prowadzę dwie przekątne w kwadracie; punkt przecięcia ich, będzie środkiem koła, które wpisać w kwadrat, i opisać na nim mamy.

2. Prowadzę dwie średnie w kole, iedną do drugiej prostopadłą. Końce ich będą wierzchołkami kwadratu wpisać się w koło mogącego: przez te wierzchołki pociągnąwszy styczne koła, te zrobią kwadrat na kole opifany.

264. *Wniosek 1.* Kwadrat opifany na kole, równa się kwadratowi średnicy iednego, i dwa razy iest większy od kwadratu wpisanego.

265. *Wniosek 2.* Z tego co się wyżej powiedziało, wynika, że przez podział, (sub-

(subdivision)
sciadanie,
kazy, który
siępnęca.

3, 6, 12, 24

4, 8, 16, 32

Przez fr. 7
nie ma zia
śe, a to jest
lu, a to jest
t. d. części
ma pomocą
takie Wielok
wyróżnaby
z 3, lub 4,
razy więcej

266. Tw
kąta opifan
Wielokąta
towi maia

(x) Co zna
da się pozna

(subdivisiones) ciągłe boków nadwie czę-
ści równe, można wykreślić Wielo-
ką, których liczba boków byłaby na
ciągająca.

3, 6, 12, 24, 48, 96, albo w ogólności.
- - - - $3 \times 2^n (x)$

4, 8, 16, 32, 64, 128, albo w ogólności.
- - - - 4×2^n

Przefr. Z pomocą foremego liniału i Cerkla,
nie można z pewnością określić i pewno-
ści, (co jest bez trudu: nie równego podzia-
łu cerklem) podzielić każdy na 3, 5, 7, i
t. d. części równych; a zatem z taką sa-
mą pomocą, nie można zawżę wykreślić
takie Wielo kąty, których liczba boków
wyrażałaby się przez liczby rozmaite,
z 3, lub 4, i t. d. przez 3, raz lub więcej
razy wzięte.

266. *Twierd. 5.* Powierzchnia Wielo-
kąta opisanego na kole, a w szczególności
Wielokąta foremnego równa się Troyką-
towi mającemu za wysokość promień
tego

(x) Co znaczą te wyrazy: 3×2^n , 4×2^n ,
da się poznać w Algebrze.

tego koła, a za podstawę *obwód* (Perimeter) tego *Wielokąta*.

Wykreśl. Od środka koła poprowadźmy linie do wszystkich wierzchołków *Wielokąta*.

Dowódz. *Wielokąt* podzielony będzie przez te linie; na tyle *Trojkątów*, ile ma boków; *Trojkaty* zaś te mają za wysokość promień koła, a za podstawę boki *Wielokąta*; więc powierzchnia tych wszystkich *Trojkątów*, czyli powierzchnia *Wielokąta*, równa jest jednemu *Trojkatowi*, któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód *Wielokąta*.

267. *Wniosek.* Gdy rozmaite *Wielokąty* opisane są na jednym kole; ich powierzchnie mieć się do siebie będą, jak obwo-
dy.

268. *Twierdzenie 6.* Powierzchnia *Wielokąta foremnego*, w kołowi-
pisanego, równa się *Trojkatowi*, mającemu za wysokość promień tego koła, a za podstawę, obwód wielokąta innego foremnego w toż koło wpisanego, a tylko połowę tyle boków mającego.

Nie-

Niechaj
EF, wyka-
formny,
tego iż so-
mającemu
la, a za p-
niedoczno

Dow-
przecina-
równob-
można,
wyśko-
żadn-
a wyśko-
Ck równ-
a do wy-
Toż mo-
wartych
kami prz-
suma
tych cz-
Wieloka-
równa fi-
miał za w-
podstawę
remnego
wę tyle

P.zyl
ta foren

Niechay na przykład sześciokąt ABCDEF, wystawia nam tak korwisk Wielokąt foremny, w koło wpisany. powierzchnia tego sześciokąta równa jest Troykątowi. mającemu za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Troykątą równobocznego, wtoż samo koło wpisane.

Fig. 1.

Dowódz. Poprowadźmy promień SB przecinający w punkcie G, bok Troykątą ASB, uważać równobocznego. Troykąt ASB, uważać można, iak gdyby miał podstawę SB. a wysokość AG. Troykąt także CSB uważać można, iak gdyby miał podstawę SB. a wysokość CG; a zatem czworokąt ASCB równa się Troykątowi, któryby miał a bo wysokość AC, a podstawę SB. Toż mówić o innych Czworokątach. zawartych między dwoma Wielokątami bokami przyległymi. i dwoma promieniami; summa więc powierzchni, wżyskich tych czworokątów. to jest powierzchnia Wielokąta foremnego w koło wpisane, równa się takiemu Troykątowi. któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta innego foremnego, wtoż koło wpisane, a położę tyle boków mającego.

Przykład. Powierzchnia Dwunastokąta foremnego w koło wpisane, równa się

się Trójkątowi, mającemu za wysokość, promień tego koła, a za podstawę obwód figury lokata, w też koło wpisane, albo, (co na jedno wychodzi) równa się Trójkątowi, któryby miał za wysokość, promień tego koła, a za podstawę, tenże promień, trzy razy wzięty.

Ta więc powierzchnia jest trzy razy większa od kwadratu promienia, i jest równa $\frac{3}{4}$ kwadratu średnicy.

Twierdzenie to stosuje się tylko do Wielokątów, których boki są parzyste; następujące Twierdzenie przystosować można do wszystkich ogólnie Wielokątów foremnych.

269. *Twierdzenie 7.* Powierzchnia Wielokąta foremnego w koło wpisane, równa się Trójkątowi, mającemu za wysokość prostą linią spuszczoną od środka koła do boku wielokąta, a za podstawę, obwód jego. (y).

Dowód. Prostopadłą tę uważać można, iak promień koła wpisanego, lub wpisane

(y) Taka w szczególności prostopadła nazywa się z Greckiego apothema.

śać się mog
twierdzenie
wyższego

270. W
kolwiek w
i w tym,
są równe,
stkich iego
ne do siebie
uczynia.

Jakoż
punktu d
ereto z
ta, ani
dane Tró
bok wiel
nań spuz
chodzi: p
Trójkąt
Wielok
nań i p
catego
Trójkąt
bok tego
nę w
go i p
kowego
wa. i w
i podstaw

śać się mogącego w Wielokat; a zatym twierdzenie to jest tylko przybliżowaniem wyższego (267.)

270. *Wniosek.* Jeżeli od punktu jakiegokolwiek w Wielokacie foremnym, nawet i w tym, którego boki tylko wszystkie są równe, spuszczamy prostopadle do wszystkich jego boków, te prostopadle dodane do siebie, jednakową zawsze długość uczynią.

Jakoż poprowadziwszy od tego samego punktu dwie linie do dwóch boków jednego z boków, powierzchnia Trykąta, temi liniami zakończona, równa będzie Trykątowi mającemu za podstawę bok wielokata, a za wysokość prostopadłą nań spuszczoną; albo co na jedno wychodzi: powierzchnia ta równa będzie Trykątowi mającemu za wysokość bok Wielokata, a za podstawę, prostopadłą nań spuszczoną; a zatym powierzchnia całego Wielokata równa się będzie Trykątowi, któryż miał za wysokość bok tego Wielokata, a za podstawę sumę wszystkich prostopadłych na boki jego wszystkich. Albo powierzchnia całego Trykąta jest zawsze jednakowa, i wysokość także jednakowa, więc i podstawa, czyli suma wszystkich prostopad-

stopadłych iednakowa zawsze będzie, z któregokolwiek punktu Wielokąta, one spuściamiy.

WSTĘP DO ROZDZIAŁÓW XI. i XII.

O używaniu Przenośnika, Cerkla proporcyanalnego; i o Podziale nazwanym Nonniuszem.

Tab.
XVI.

271. *D^{ef.}* Przenośnik (Transportator) iest to połkole, którego okrąg podzielony iest na stopnie, albo, gdy większy będzie, na półstopnie, i ćwierci stopniów.

272. *Zagadn. II.* Maiąc dany kąt na papierze, znaleźć liczbę stopniów, którą w sobie zamyka.

Sposob 1. Przykładam środek przenośnika do wierzchołka kąta danego, a podstawę tegoż przenośnika do iednego z ramion kąta; łuk przenośnika zawarty między ramionami kąta, pokaże w stopniach ważność iego.

Sposob 2. Od wierzchołka kąta danego, iak od środka, promieniem równym pro-

promieniowi
warto między
dwóch kątów
ktem na ok
średnicy, ko
łuk przenoś
cy i drugie
mie Cerkla
w stopniach

273. Z
punkcie r
wierający

Sposob
przenośnik
tey linii prz
danego. na
któremu o
ukazujący
punkt łącz
ta linia uc
kalem.

Te dział
przenośnik
ruchomy o

Sposob
środek, pr
wi przeco

promieniowi przenośnika, kreślę łuk zawarty między ramionami kąta, odległość dwóch końców tego łuku rzucisz cerklem na okrąg przenośnika, od końca średnicy, która mu służy za podstawę; łuk przenośnika między końcem średnicy i drugim punktem, gdzie drugie ramie Cerkla przypadnie, zawarty, pokaże w stopniach wartość kąta danego.

273. *Zagaśn. 2.* Na linii danej, i przy punkcie na niej danym, zrobić kąt zawierający w sobie daną liczbę stopniów.

Sposób 1. Położywszy na linii danej przenośnik, tak, aby średnica jego, do tej linii przystawała, a środek do punktu danego, oznaczam na papierze punkt, któremu odpowiada punkt przenośnika ukazujący liczbę daną stopniów, ten punkt łączę linią z punktem danym, a ta linia uczyni z daną kąt, którego szukałem.

To działanie będzie dokładniejsze, gdy przenośnik ma sobie przydany promień ruchomy około środka jego.

Sposób 2. Od punktu danego; iak od środka, promieniem równym promieniowi przenośnika, kreślę łuk, i na ten, wziętą

wzięta na przypośniku liczbę stopniów danych przenoszę, od punktu przecięcia linii z tym łukiem, aż do drugiego punktu na tymże łuku. Punkt ten ostatni złączę z punktem danym na drugiej linii, te obie dwie linie zamykać będą kąt, którego szukałem.

274. Zagadn. 3. W danego koła, wpisać Wielokąt foremny o pewney liczbie boków.

Rozwiąz. Szukam kąta w środku tego Wielokąta; ciągnę promień jakkolwiek, i robie na nim kąt równy kątowi w środku Wielokąta, mający środek koła danego za wierzchołek; łuk tego koła zawarty między ramionami kąta, będzie miał za cienciwę bok Wielokąta danego.

275. Zagadn. 4 Na danej linii wykreślić Wielokąt foremny o pewney liczbie boków.

Rozwiąz. Przy dwóch końcach danej linii robie dwa kąty równe połowie kąta, przy obwodzie Wielokąta, którego szukam. Punkt przecięcia ramion tych dwóch kątów będzie środkiem koła, w które wpisać się da Wielokąt. o tej liczbie bokach, ile ich dano, i tej wielkości, jakiej jest linia dana.

276. Uwaga
wysięga w
promień n
wiąć się t
uchybienia.

Miedzy
statkami,
mienia w
dług okol
siąpić mo
nazwane
w cerklu

277. Na
proporey
cienciu, k
środku (in
ra tam, g
mniejszy
liczba 60.
punktów
cienciu wy
calculum)
wielkość o
kole, które
ści środka
punktu pod
a roz przy
stopniów

276. *Uwaga.* Używanie przenośnika, wyciąga wielkiej baczności. Im większy promień mieć będzie, tym mniej obawiać się trzeba znaczniejszego jakiego uchybienia.

Miedzy innemi narzędziatego niedostatkami, jest ten mianowicie, że promienia w nim odmienić nie można według okoliczności; ale ten niedostatek zastąpić może w potrzebie inne narzędzie nazwane *linią cienciw* (Linia chordarum) w cerklu proporcjonalnym.

277. Na obydwóch ramionach cerkla *Tab. XVII.* proporcjonalnego, znajduje się *linia cienciw*, którey podziały zaczynają się w środku (in centro) tego narzędzia; a miera tam, gdzie jest liczba: 180. albo w mniejszych narzędziach tam, gdzie jest liczba 60. Odległości środka od imych punktów podziału, pokazują wielkość cienciw wyznaczoną przez *racunek* (per calculum) albo przez figurę dokładną. Ta wielkość cienciw wyznaczona jest w połkoie, którego promień równa się odległości środka cerkla proporcjonalnego od punktu podziału naznaczonego liczbą 60; a to z przyczyny równości cienciwy 60; stopniów z promieniem.

R

Po-

Ponieważ rozwiązanie czterech poprzedzających zagadnień iedynie zawisło od wyznaczenia cienciwy łuku, to iest od wielkości -iey względem promienia; można więc cztery te Zagadnienia rozwiązać, używając, iednego tylko ramienia w cerklu proporcjonalnym, biorąc za promień koła odległość punktów: 60, i 60.

Dwa razem ramiona tego cerkla służą do odmienienia promienia; najmniejszym będzie, odległość dwóch punktów 60, i 60. gdy Cerkieł proporcjonalny zupełnie iest zamknięty; powiększonym zaś będzie przez odległość większą tychże punktów, gdy cerkiel coraz więcej otworzymy; a naywiększym będzie, gdy cerkiel cale tak otworzemy, że ramiona iego w prostej, będą linii.

Niechby naprzykład tak był otworzony cerkiel proporcjonalny, aby odległość dwóch punktów 60. i 60, czyniła połowę odległości iednego z tych punktów, od środka; będzie też i odległość drugich punktów odpowiadających sobie naprzykład 40 i 40, połową odległości iednego z nich od środka; a zatym odległość ta punktów: 40, i 40, oznaczylaby cienciwę stonniów 40, albo 40°, w kole, którego promień równałby się odległości punktów

któw 60 i 60
bawch, w ko
siebie, iak tyc
rosi więc m
zułany odle
li i cienciw.
dwóch punk
czonych ied
ciwa łuku,
ta liczba.

Ztąd wyn
gę cienciwo
poprzedzają
cienciw, i od
mień.

278. Przy
punkcie 12
kąt o pewney

Rozwiązanie:
mień; otwórz
tak, aby odleg
liczył 60, by
Od punktu da
mieciem rym
n. y. na cienci
punktów naz
punktów.

któw 60 i 60; bo cięciwy łuków podobnych, w kołach różnych tak się mają do siebie, jak tychże koł promienie. W ogólności więc mówiąc: gdy zapromień weźmiemy odległość punktów 60. i 60. na linii cięciw, iakażkolwiek inna odległość dwóch punktów na tejże linii, oznaczonych jednakową liczbą, będzie cięciwą łuku, o tylu stopniach, ile wyraża ta liczba.

Zgad wynika sposób, którego użyć wygodnie można, chcąc rozwiązać cztery poprzedzające zaproszenia, przez linię cięciw, i odmierzać jak się podobą promień.

278. *Przykład 1.* Na danej linii i przy punkcie na niej, także danym, zrobić kąt o pewnej liczbie stopniów.

Rozwiąz: Weźmy iakikolwiek promień; otwórzmy cerkiel proporcjonalny tak, aby odległość punktów oznaczonych liczbą 60, była równa temu promieniowi. Od punktu danego, jak od środka, promieniem tymże nakreśmy łuk koła, i odcinamy mu cięciwę równą odległości dwóch punktów oznaczonych liczbą daną stopniów.

279. *Przykt. 2.* Na daney linii wkre-
ślić Wielokąt foremny iakikolwiek.

Rozwiąz. Szukaymy kąta, iaki być
powinien w środku Wielokąta żadanego;
otworzmy cerkiel proporcjonalny tak,
aby odległość punktów naznaczonych na
linii cienciw tą liczbą, iaka iest liczba
stopniów kąta, w środku, Wielokąta,
równała się linii daney; na teyże linii
wystawmy. Troykąt równoramienny,
dawszy mu za ramiona, liniie równe od-
ległości punktów naznaczonych liczbą
60; wierchołek tego Troykąta, będzie
środkiem koła, w które wpisać można
Wielokąt żadany.

280. *Uwaga.* Co do wykreślenia Wie-
lokątów foremnych w szczegulności: aby
się obeysé można bez szukania kątów w
środku, znayduie się na cerklu proporcjo-
nalnym osobna linia Wielokątów, za
którey pomocą, zaczawszy od Troykąta,
lub Czworokąta, aż do dwónastokąta,
wykreślić można. Odległość środka, tego na-
rzedzia, od punktu 6, tey linii Wieloką-
tów, wziąwszy za promień, albo za bok
Sześciokąta foremnego w koło wpisane-
go, odległości, tegoż środka od pun-
któw: 3, 4, 5, i t. d. pokażą wielkość
boku Wielokąta foremnego, który wpi-
sać

sać można
kach, ile z
Albo też:
proporcyon
Wielokątów
któw 6, i
punktów:
żą bok W
moy liczb
do którego
głość pun

281. T
proporcjo
go iest uży
nych. Na
nalnego ra
long na 20
gdy cerkiel
więcey. I
rzemy, od
znaczony
200, będzie
głości punk
cztery razy
punktów,
odległość d
ty samą lo
tak miała
punktów p
naznaczony
liczby.

fać można: w to samo koło, o tylu baskach, ile znaczą liczby: 3, 4, 5, i t. d. Albo też: otworzywszy do woli cerkiel proporcjonalny, i wziąwszy na linii Wielokątów za promień, odległość punktów 6, i 6; odległości innych dwóch punktów: 3, 13; 4, 14; 5, 15; i t. d. pokazą bok Wielokąta foremnego o tejże samej liczbie boków wpisanego w to koło, do którego za promień wzięliśmy odległość punktów 6 i 6.

281. Trzecia linia, którą na cerklu proporcjonalnym zauważamy, a wielkiego jest użytku, nazywa się *linią częściowymi*. Na obydwóch cerklu proporcjonalnego ramionach, mamy linią podzieloną na 200. części równych, a czasem, gdy cerkiel mniejszy, na 120. mniej lub więcej. Jakożkolwiek ten cerkiel otworzymy, odległość dwóch Punktów naznaczonych tą samą liczbą na przykład 200, będzie dwa razy większa od odległości punktów naznaczonych liczbą 100, cztery razy większa od odległości dwóch punktów, 50; i t. d. a mówiąc ogólnie: odległość dwóch jakichkolwiek punktów tą samą liczbą naznaczonych, będzie się tak miała do odległości dwóch innych punktów przez jednakową także liczbę naznaczonych; jak się mają do siebie też liczby.

Niechby na przykład podzielić trzeba
linia daną na 5 części równych,

Otworzymy tak cerkiele proporcjonal-
ny, aby odległość punktów naznaczo-
nych liczbą podzieloną przez 5, równa by-
ła linii danej; niech na przykład odległość
ta będzie punktów naznaczonych liczbą:
200; weźmy piątą część tej liczby, to
jest 40, a odległość tych dwóch punktów
naznaczonych liczbą 40; będzie częścią pią-
tą linii danej.

283. *Uwaga.* Ostatnią tę odległość znalezionej przenieszenia 5 razy na linię daną, ułożenie kłosa zająć mogło więcej wielkości, byłoby 5 razy powtórzone, a zarys tak powtórzone, mogło by być stać znacznym, chociaż każde z obojga było nieznaczne. Przytrafiło się to może okoliczności w ten czas, gdy na wiele części dzielić przychodzi linią. Aby więc tego powtarzania uniknąć, lepiej będzie wziąć osobno $\frac{1}{3}$ linii, to jest odległość dwóch punktów n. linię daną, toż uczynić, wzięwszy potem $\frac{1}{3}$ linii i t. d.

284. U
leściana.
wym. sto
naprzykko

Przenie
naznaczon
przykład
by 140,
punktów:
każdey.

285. U
bach trzy

Przegląd
całkowity dy
128.

Otworzyć
porcyonal
150 dw
kt 'w 128.
a 231751 11

286. U
kai n z wy
mya nap
wielkośc i

Przenie
Kta: 200;

284. *Utworzenie 2.* Mając daną linią znaleźć inną, której do niej była w danym stosunku, w liczbach wyrażonym, na przykład iak 4 do 7.

Przenieśmy linią daną na dwa punkta, naznaczone liczbą podzielną przez 7, na przykład na dwa punkta: 140; z tej liczby 140, są 80; odległość tych dwóch punktów: 80, będzie linią, której szukaliśmy.

285. *Utworzenie 3.* Mając dane w liczbach trzy boki Trojkąta, wykreślić go.

Przykład. Niechby trzy boki Trojkąta miały być, iak trzy liczby: 150, 147, 128.

Otworzymy iakokolwiek cerkiel proporcjonalny: odległości dwóch Punktów: 150 dwóch punktów: 147, i dwóch punktów 128, będą do siebie, iak boki dane; a zatem mogą być wzięte za te boki.

286. *Utworzenie 4.* Mając dany Trojkąt już wykreślony, którego podstawa zamyka na przykład 100. sznurów, znaleźć wielkość innych dwóch boków.

Przenieśmy podstawę daną na dwa punkta: 200; zmierzmy cerkiem, długość
dwóch

dwóch innych boków, i przenieśmy ją znówu na punkta dwa jednakową liczbą oznaczone, tam gdzie przypadnie; liczyćby dwie, na które długość tych dwóch boków przypadnie, wyrażać będą długość tychże boków w sznurach,

Opuszczam inne używania, gdzie wykreślenie Geometryczne, krótsze jest częściej, i pewnieysze; iak naprz: w znalezieniu kwadratu, równego summie dwóch innych danych, albo więcej.

287. *Uwaga: 1.* Gdy kto nie ma cerkła proporcjonalnego, może na miejsce iego, a czasem i lepięy użyć linii podzieloney na wiele części równych.

288. *Uwaga: 2.* Gdy część najmniejsza, której nam do podziału potrzeba, jest bardzo mała, a liczba części których szukamy znacznie wielka; w takim razie trudno jest mieć wszystkie, na teyże samej linii, podziały, tak aby ie dobrze rozeznąć można. Udamy się więc w podobnym razie do sposobu następującego:

Tab. XV. Niechby podana była linia, która zbyt jest mała, aby ją widocznie na 10, części podzielić można; trzeba osobno te części wynaleść od 1, aż do 10.

Roz-

Rozwiązanie
proszę
noodlegie.
szę od koń
nych częś
jedney rów
ktem od
równoodl
równoodl
iednego l
czną do
równoodl
linia wy
linii dane

Mając d
dzielenia
dnak tak
cznie pod
podzieli
nych wyz
cheemy,

Rozwi
równych
podziału,
wyciągni
kołwiek,
jest, aby
biały.)
równood
mało róż

Rozwiąz. Przez dwa końce tej linii prowadzę, po iedney stronie dwie równoodległe. Na te równoodległe przeneszę od końców linii danej części równe części; każdy Punkt podziału w iedney równoodległej, łączę linią z punktem odpowiadającym mu na drugiej równoodległej. (Te linie łączące będą równoodległe od linii danej) Od końca iednego linii danej, ciągnę linią poprzeczną do końca drugiego linii ostatniej równoodległej od danej; Ta poprzeczna linia wyznaczy na równoodległych od linii danej, części których szukam.

Mając daną linią bardzo małą, do podzielenia na 100, równych części, ale iednak tak wielką, aby mogła być widocznie podzieloną na 10, równych części; podzielić ją tak, aby tyle zaraz części równych wyznaczyć na niej można, ile zechcemy, zaczawszy od 1, aż do 100. Fig. 5.

Rozwiąz. Podzielmy tę linią na 10, równych części; przez pierwszy punkt podziału, y przez drugi koniec tej linii, wyciągniemy dwie równoodległe iakiekolwiek, (zręczniey iednak, i wygodniey iest, aby mało co od prostopadłych uchybiały:) Przenieśmy znowu na te dwie równoodległe 10, części, równych, albo mało różniacyen się od części linii danej.

Zią-

Złączmy drugi koniec linii danej, od którego nie była prowadzona równoodległa, z ostatnim punktem podziału równoodległej bliższej; złączmy także i punkta iednney równey odległej z punktami odpowiadającemi na drugiej, i przeciągniemy je aż do linii ostatniey nierównoodległej. Nakoniec przez wszystkie punkta podziału li ii danej prowadzmy równoodległe od dwóch pierwszych równoodległych, co z łatwością pr. ydźcie, przenioszły podział li linii danej, na linię iey przeciwną i łącząc końce dwóch pierwszych równoodległych, i złączmy vszy linijami punkta podziału odpowiadające. Po takim wykreśleniu, mić zaraz można tyle co chcemy części równych na linii danej, zacząwszy od 1. aż do 100.

Trzeba nam przykłąd znaleźć nam części 64. i takich, takich linia dana ma 100.

Stawmy ramie iednę cerkla zwyczajnego na punkcie średnim. + i otworzmy cerkiel tak szeroko, aż drugie ramie iego przypaśnie na przecięcie dwóch linii, których końce naznaczone są liczbami: 4 i 60. Ta otwartość cerkla, da nam liczbę części, których szukaliśmy, i t. d.

Przedłożając linią daną, i wszystkie od niej równoodległe, aż poki te przedla-
że-

zenia nie będą równe linii danej wziętej raz, dwa razy, trzy razy -- dzieląc razy, otrzymamy taką liczbę części, jaką zechcemy, zależąwszy od 1, aż do 200, 300, 400. -- 1000.

Taka *podziałka* (scala) jest do używania najwygodniejsza, gdy kto nie ma cerkła proporcjonalnego, dla tego też inaywięcej jej używają.

289. Inny sposób do wynalezienia części równych linii danej, tak małej, że jej podzielić widocznie nie można na części żądane, jest ten, który się nazywa *potężnym Nannigera*, a który raczy nazywać się również podziałem *Terzara*, z przyczyny, że tak zwat się prawdziwy podziału tego wynalazca.

Niechby na przykład przefzło podzielić na 30 równych części linią tak małą, że widocznie nie da się części, tych wyznaczyć nie można, niechby jednak była wielkości, że można ją wyraźnie podzielić na 5, albo 6, części równych.

Podzielmy tę linią na przykład na 6 części równych, i drugą jej równą, na 5 równych części. Rozłoża szóstą część pierwszego podziału, od pierwszej części drug-

Fig. 6.

drugiego podziału, będzie równą różnicy między $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ częścią całej tey linii danej, to iest będzie $\frac{1}{6}$ tey linii. Gdy tedy te dwie linie tak ułożemy, że iedna będzie przy drugiej, i końce iedney wprost będą na przeciwko końców drugiej; odległość dwóch punktów pierwszego podziału w obydwóch liniach, będzie 30tą częścią danej linii; podobnie odległość dwóch punktów drugiego podziału (rachując od tychże samych, co wyżej końców) będzie: $\frac{2}{3}$; odległość dwóch punktów trzeciego podziału: $\frac{3}{4}$, czwartego: $\frac{4}{5}$, piątego: $\frac{5}{6}$, albo $\frac{1}{6}$ stą częścią całej linii danej: to iest iedną z tych części, na które ta linia iest podzielona.

Tab. . 290. Czwarta linia, która ieszcze zwykła się znaydować na cerklach proporeyonalnych, i którey wykreślenie zasadza się małym; co się wyżej iuż wyłożyło, nazwana iest *linią Płaszczyzn* (linea Planorum)

Odległości środka w cerklu proporeyonalnym od punktów podziału tey linii; tak się mają do siebie, iak boki kwadratów, które w tym samym stosunku byłyby do siebie, w którym są liczby przy tychże punktach wyrażone. Y tak gdyby kwadrat ieden był: 4, 9, 16, 25, 36, 49,

49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401, 2500, 2601, 2704, 2809, 2916, 3025, 3136, 3249, 3364, 3481, 3600, 3721, 3844, 3969, 4096, 4225, 4356, 4489, 4624, 4761, 4900, 5041, 5184, 5329, 5476, 5625, 5776, 5929, 6084, 6241, 6400, 6561, 6724, 6889, 7056, 7225, 7396, 7569, 7744, 7921, 8100, 8281, 8464, 8649, 8836, 9025, 9216, 9409, 9604, 9801, 10000

Szczegółowy opis tego rysunku, który przedstawia linie proporeyjne, znajduje się w poprzednich częściach dzieła. W tym miejscu należy zwrócić uwagę na to, że linie te są używane do wyznaczania odległości i stosunków między punktami. Wskazano na to, że linie te są używane do wyznaczania odległości i stosunków między punktami. Wskazano na to, że linie te są używane do wyznaczania odległości i stosunków między punktami.

Używkla proporeyjne było

Porcie od punktu

49, 64, razy większy od drugiego; bok tego drugiego kwadratu większy byłby: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 razy od pierwszego; dla tego też odległości od środka, punktów naznaczonych liczbami: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, tak się mają do siebie, jak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Szczupłość narzędzia nie pozwoliła daley tych podziałów rozciągnąć. Co się zaś tycze boków w kwadratach średnich między temi, które się dopiero wyraziły; można je wyznaczyć przez figurę dokładną, lub przez rachunek przybliżając ich ważność do prawdziwej. Y tak jeżeli odległość środka od punktu: 1, będzie wyrażać bok kwadratu równy naprz: 12 jakim częściom; odległość tegoż środka od punktu: 2; wyrazi bok innego kwadratu równy blisko 17, takimże częściom; albo gdy pierwsza odległość znaczy nap: 100, druga znażyć będzie trochę więcej jak 141, i t. d.

Używanie w tym, dwóch ramion cerkla proporeyonalnego, jest to samo, które było i do innych linii.

Porieważ naprzykład odległości środka od punktów:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,
małą się
Do siebie, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;
i tak liczby: - - - - - więc też
i odległości dwóch punktów jednakową
liczbą naznaczonych:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,
Przy jakim-
kolwiek o-
twieraniu - - - - -
celrka, mieć - - - - -
się będą iak - - - - -
liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Toż mówić i o innych liczbach pośre-
dnich.

Pryyństwo Niech będzie dany bok
kwadratu iednego; trzeba znaleźć bok in-
nego kwadratu, któryby był $\frac{1}{2}$, pier-
wizego.

Otwieram tak cerkiel proporcjonalny,
aby dwa ramiona cerkla zwyczajnego,
z otwartością równą bokowi danemu,
przypadły nadwa punkta linii płaszczyzn,
jednakową liczbą naznaczone, która
podzielona być mogła przez 6; na przykład
na dwa punkta: 60. Biorę $\frac{1}{2}$ tej liczby
60, to-iest: 30; i nieodmieniając otwarcia
cer-

cerkla propo-
głość dwóch
linią które
mającemu by-
figury podob-
kwadraty i-
sobie, prze-
równie moż-
bnych.

R O

Peru

Jeżeli gd-
bnych uż-
szczególnie
rze figury,
dobne tym-
gdy wyzna-
punktów na-
cych się, któ-
wyznaczyć c

291. Przy
kwadratowa,
lokal 10-

Jakiejkol-
ryfuiemy na
podobną bę-

ceerka proporcjonalnego. mierze odległość dwóch punktów: 50; a ta będzie linią której szukam za bok kwadratowi, mającemu być $\frac{1}{2}$, kwadratu drugiego; że figury podobne mają się do siebie, jak kwadraty ich boków odpowiadających sobie, przeto działanie to przyrównać równie można do wszystkich figur podobnych.

ROZDZIAŁ XI.

Pierwsze początki Miernictwa.

JFżeli gdzie nauka o figurach podobnych używana bywa w praktyce, to szczególnie gdy się wykreślają na papierze figury, choć w m.łości twojej, podobne tym, których są wyobrażeniem; i gdy wyznaczamy na karcie położenie punktów na polu naprzykład znajdujących się, których tam dla różnych zawodów wyznaczyć częstokroć nie można.

291. *Przykład 1.* Niech będzie izba kwadratowa, której bok zmierzony, ma łokci 10-

Jakieykolwiek wielkości kwadrat odrysujemy na papierze, zawsze tego figura, podobną będzie do figury izby.

Zeby

Zeby jednak patrząc na kwadrat na papierze odrysowany, można sobie wyobrazić wielkość tej izby trzeba położyć oznaczyć *Podziałkę*, według której bok izby przenieśliśmy na papier: bo inaczej zapatrując się na ten ostatni kwadrat, poznałibyśmy, tylko iaka jest figura izby, a nie wiedzieli ieszcze; iaka iey wielkość.

Gdyby ta izba była prostokatem, mającym długość łokci na przykład 12, a szerokości łokci 8; odrysowawszy na papierze iakikolwiek prostokąt, którego dwa boki miałyby się do siebie, iak 12, do 8; ten prostokąt podobny do izby, wyobraziłby nam iey figurę, ale nie wielkość; która dopiero wten czas byłaby poznana; gdyby się wyraziło, w jakim mierze to przeniesienie boków izby na papierze stało się, czyli to przypisując do boku odrysowanego, że łokci 12, ukazuje, czyli oznaczając iaka jest długość na papierze wyrażająca łokci 10; i t. d.

Mierzając podobnie długość i szerokość domów, dziedzinców, ulic grubość murów i t. d. można wyrazić na papierze wszystkie te, iedne względem drugich położenia i wielkość każdej z osobna części nap: budynku i t. d.

Można

Można potym i drobniejsze części wy-
rządzić, kładąc przełożenia drzwi, okien, i t.d.
aby pod każdym razem widok poddać budy-
nek cały i z jego częściami.

Kilkakrotnie takowe roboty czyniąc,
nabędą w nich Uczniowie coraz więkzey
łatw. ści.

292. *Przykład. 2.* Niech będzie na po-
łu Troykat, którego, boki wżyskć zmie-
rzyć można: jeden z tych boków zawie-
ra łokci: 180, drugi: 164, trzeci: 148.

Zróbmy jakąkolwiek podziałkę, i według
niej zrobmy Troykat, którego trzy boki
zawierałyby liczbę części równych z tej
podziałki ieden: 180, drugi: 164, trzeci
148. Ponieważ ten mały Troykat ma bo-
ki w tym samym stosunku, w którym są
boki Troykata wielkiego, na pułu na-
przykład wymierzone; niezyn więc od
wielkiego Troykata różnica nie będzie,
tylko samą wielkością; a zatem i dzie-
nam go mogli wyobrazić, i samemu wy-
znać samę wielkość jego, gdy na przykład
wyraziliśmy podziałkę, którą do tego u-
żyliśmy.]

293. *Uwaga.* W odwołaniu się do
diagoneli do mierzenia, by było prościej,
5

a przeto gdybyśmy używali w takim razie krótkiej jakiej miary, na przykład łokcia, robota, byłaby długa, i bardzo pracowita; a na lewżyńko ucięcia, małe, których ciężko uchronić, wprzekładaniach następnych miary, zebrane razem, uczyniłyby omyłkę tym znaczniejszą, im częściej byłyby powtórzone. Ztego powodu, wniósł się używanie sążni, prętów, a nawet i sznurów, na miejsce łokci.

Do wymiarów tedy długości znaczniejszej, należy mieć sznur, a jeszcze lepiej łańcuch, który pewną liczbę łokci albo sążni w sobie zamyka. Damy na przykład, że łańcuch krórego używamy, ma w sobie 10, sążni. Takowy łańcuch, do długości 180, łokci, przyłożyć trzeba następnie może tylko raz, a już cała ta długość będzie wymierzona; będzie zatym wymiar i prędkiej pewniejszy. W takowych wymiarach wielkiej baczności potrzeba.

1. Należy być zapewnionym, że miary braue są w linii prostej.

Tym końcem rozstawia się żerdzie, w pewney od siebie odległości; i w tej linii, którą mierzyć przypada, tak; aby pierwsza żerdź zaślaniała następujące, a ośobliwie drugi koniec linii do mierzenia:

trzeba

trzeba taką
padle (z)
pendiculum

2. Jeżeli
niezgodnie
drzewo, ro
bliwie gd
wystawie
wyłoką z
ra wierzo
kiem.

3. Trze
kładania
prostej; w
znaczney.
wizy kon
nier się p
znak drug
aby i te
też for
trzecia of
linii do m
uważać p
nii prostej

(z) Imie
zwa. r
wać bę

trzeba także te żerdzie ustawić prostopadle (z) używając do tego *Pionu* (*Perpendicularum*.)

2. Jeżeli na końcu linii do mierzenia nieznajdujemy jakiegokolwiek znacznego, na przykład drzewo, rog domu, i t. d. trzeba tam osłownie gdy długość jest bardzo wielka, wyznaczyć znak jaki, na przykład żerdź wysoka z chorągiewką, z tablicą białą na wierzchu, lub z innym podobnym znakiem.

3. Trzeba jeszcze uważać, aby przykładania następne miary, były w linii prostej: według drogi od żerdziów wyznaczonej. Przeto ten, co trzyma pierwszy koniec łańcucha lub sznura, powinien się postawić wprost żerdziów, i dać znak drugiemu trzymającemu drugi koniec, aby i ten wprost niego stanął w tejże samej linii; albo znowu trzecia osoba, stojąc przy końcu jedynym linii do mierzenia, przestrzegać będzie, i uważać przykładających miarę, aby z linii prostej nie odchodzili.

S2

4.

(z) *Linia prostopadła do jakiegokolwiek płaszczyzny, po której (horizontalis) i czytać będziemy Pionową (verticalis)*

4. Trzeba się starać, aby przy każdym przykładaniu miary, łańcuch, lub sznur, jak najbardziej był wyciągnięty; dlatego należy go do samej ziemi przykładać, jeżeli ta równa jest wszędzie; albo też wspierać go na podporach w pewnym odległości rozstawionych; a tym sposobem nachylenie, które ciężar łańcucha, lub sznura sprawuje, będzie mniej znaczne.

Y dla tegoć to, w robotach wielkiej wagi, i osobliwej dokładności wyciągających, łańcucha, ani sznura używać nie można.

5. Trzeba jeszcze mieć bacznąć, aby do tego samego miejsca, gdzie się miara jedna skoczyła, przykładać znowu koniec sznura, lub łańcucha. Dla tego należy dla znaku wbić zaraz żerdkę lub kół w to miejsce, w którym się miara przeszła za-kończyła, a następująca ma się zaczynać.

6. Trzeba dobrze pamiętać, ile razy się łańcuch, lub sznur w całym wymiarze przykładał; i aby o tym dla jakiego rozstrągnięcia nie zapomnieć, lepiej jest za każdym razem naznaczyć sobie to przykładanie, albo nakarcić, albo wtykając na końcu każdego w szczególności wymiaru, znak jaki.

7. Będąc równie także jest, powtórzyć
zawsze wymiar całej długości.

8. Jeżeli pole do wymierzenia całe jest
otwarte, i wolne, można go podzielić na
Troykaty; czyli to prowadząc wszystkie
przekątne od jednego rogu, czyli biorąc
bok jeden, za wspólną podstawę tylu Troy-
katów, ile będzie pozostałych rogów;
czyli iestżne wyznaczając punkt w sa-
mym polu, i wiodąc go jak wierzcho-
łek, albo raczej zbieg tylu Troykatów,
ile figura, którą odrywać chcemy, ma
boków. Zmiaryżymy, tym wszystkie boki
wszystkich tych Troykatów, można będzie
odrywać na papierze figurę podobną,

294. *Przykład.* Ten sposób postępowania
iż, w odrywaniu pola, i mierząc w ilości
wszystkie. Pół do tego potrzebne; i cza-
ści wiele zacięra, i rzadko nawet trafia-
ją, aby nie tak było wolne, żeby na
nim sposobu tego użyć można.

Jednych zarym użyć trzeba w tym razie
sposobów. Lecz się tu przytoczą, zaczy-
nając od łatwiejszych i prostszych: Po-
sierzdz tu łatwo będzie można, iż uży-
wanie sposobów trudniejszych i bardziey
zawiślszych, nie zawżdo od prawideł
Geometrycznych, których gruntu tenże
amf

sam jest zawsze i jednakowa dokładność, ale przyczyną niedoskonałości zmyśłów naszych, i ręcznych działań.

295. *Zagadn.* Znaleść iakiego celu odległość nie mierząc tey *bezpośrednio* (imediatę) czyli nie udając się wprost, aż do samego celu.

Sposob 1. W którym samych się tylko żerdzi lub kołow używa.

1. Wymierzmy podstawę iaką, któraby się ziedney strony kończyła na punkcie, od którego odległość celu chcemy wiedzieć. Ta podstawa (dla więkſzey w praktyce dokładności) powinna być tym dłużſza, im odległość celu, okiem miarkowana, zdaie się być znaczniejszyſza. Dla teyże w praktyce dokładności, trzeba ieſzcze takie położenie wybrać tey podstawy, aby prostopadła, któraby do niey od celu spuścić można, iak naybliſzey tey środka przypadła; ponieważ że wſzystkich innych teyże długości podstaw, podstawa z takim położeniem ieſt naywygodniejszyſza.

2. Wytkniemy kołami uſtawionemi od obydwóch podstawy końców, dwie linie, ku celowi, którego ſzukamy, prowadzące.

3.

3. Zmierzymy od iednego końca podstawy, dwie jakiegokolwiek długości, iedną na podstawie, a drugą na linii kołami. wyznaczoney; zmierzmy radło, i odległość kołców, tych dwóch odległości iż w nich pomierzmy. Zrobmy to iaino i z drugiego końca podstawy.

Mając te na ziemi wymiary, możemy na papierze odrysować Trowkar podobny temu, który ma za podstawę linię na ziemi wymierzoną, a za wierzchołek, punkt ten, którego odległości szukamy.

Jakoż wyraziwszy na papierze, podstawę przez linię jakiegokolwiek, można będzie przy obydwóch końcach tej linii odrysować dwa Trowkary, których łuki takby się miały do siebie, iak się miały odległości na ziemi wymierzone (pod lezbą 3) i na zatym i linie które się ciągnęły od końców podstawy na ziemi, do punktu, którego odległości szukamy, będą tak do tej podstawy nachylone, iak i linie dwie na papierze, od końców linii wyrażającej podstawę prowadzone, nachylają się do tejże podstawy.

296. Przegląd. Ten sposób wielkiej bardzo wymaga bacznosci, tak w działaniu na ziemi, iako i w przenożeniu ich

na papier. W tym razie tylko można go użyć, gdy i odległości nie są znaczne, i wielka dokładność nie potrzebna; gdy natomiast wyobrażenie tylko chcemy sobie uczynić nie znajomey odległości i takiego celu; wyznaczenie według tego sposobu położenia punktu iakiego niedostępnego, od tego zawisło, aby doysić nachylenia iedney linii wiadomey, to jest podstawy, do dwóch innych, prowadzonych od obojwóch końców teyże podstawy, ku punktowi, którego położenia szukamy; ponieważ gatunek Troykąt, temi trzema liniami zawartego, a zatem i stosunek iego boków już wyznaczony będzie przez te nachylenia. *Stół Geometryczny* (*Tabula Preteriana*) i *Kijometr* (*Graphometrum*, al. *Instrumentum Geometricum*) są to dwa narzędzia szczególniej używane do wyznaczenia bezśrednie takich nachyleń.

Sposób 2. Przez stół Geometryczny.

207. Niebawicie nadopisanem tego narzędzia, i sznur do niego należący (bo samo rzucenie oku, dopiemoż użyć, nie, więcej wrey mierzy na tyn, niż opis choć i też konieczny był) przeszedł tylko, należy, że należy jest mieć przy sobie, gdy kogoś nac na to porę, o.
K. y-

poprowadzoney od iey końca ku punktowi niedostępnemu, wyrazimy na stoliku, przez linią od końca podstawy wiedzioną przy prawidle, ku temuż punktowi zkirowanym. To zrobiwszy, przeniesiemy stolik na drugi koniec podstawy, na ziemi wymierzoney, i podobnie sobie, iak przy pierwszym końcu podstawy postapiemy, ciągnąc znowu przy prawidle, linią od końca drugiego podstawy na stoliku wyrażoney, ku punktowi, którego odległości szukamy. Trykąt wykreślony tym sposobem na stoliku podobny będzie Trykątowi na ziemi, zamkniętemu między podstawą wymierzoną, i dwoma bokami, któreby od iey końców prowadzone schodziły się w punkcie zostającym w odległości niedostępney; a zatym wielkości linii na stoliku wykreślonych, i podług podziałki wymierzonych, dażą nam poznać i wielkości linii odpowiadających na ziemi. Y tak niechby naprzykład długość podstawy na ziemi, była: 200 sążni, którą wyraża na stoliku linia zamykająca w sobie 200 równych części wziętych z iakieykolwiek podziałki. Jeżeli druga linia na tymże stoliku poprowadzona od końca pierwszej wyrażającej podstawę, ma w sobie podług tej samey podziałki: naprzykład 180 części, to będzie dowodem, że i linia odpowiadająca iey na ziemi, zawiera 180 sążni.

298. Użytko do d...
kła taka d...
lika udyb...
choćnie S...
Szczupłość...
ni przez...
linie uwa...
nia tym z...
ożnienie d...
wać stolik...
na papi...
rozciąg...
tylko w...
ożnienie...
go poide...
nuz wyzn...
izm; i...

299. S...

Wystaw
dzia. a po
poznać.
ka uwagę

(i) Nauka
kaza U
sog m
tym, z
del z

298. Używanie stolika nie rozciąga się, tylko do długości pomiernych. Naywiększa taka długość, do której jeszcze stolika użyćby można, nie powinna przechodzić 300, a najwięcej 400. Iżni Szuupłość narzędzia tego, a zatem i linii przez które ma się wyrażać linie uważane na ziemi, czyni uchybieniem tym znaczniysze, im większe są te ostatnie długości. Możemy jednak używać stolika, gdy idzie tylko o wyrażenie, na papierze gruntu jakiego nie bardzo rozległego i prawie foremnego: aleo gdy tylko wewnątrz niejednolitego gruntu chociaż obżernego, wyznaczyć potrzeba, którego położenie punktów znamienitszych, już wyznaczone jest sposobem dokładniejszy; który zaraz wyłożę.

299. Sposób 3. przez Kątomierz (c).

Wystawienie przed oczy tego narzędzia, a potem używanie, da go najlepiej poznać. Tę tylko, co i względem stolika uwagę przydać należy, że kątomierz z ru-

(c) Nauczyciele nie mając Kątomierza, ukażą Uczniom przenośnik, który małością tylko różni się od Kątomierza, i tym, że nie ma przylanych sobie prętów z Celownikami.

z ruchomemi prawidłami, na płaszczyźnie pionowej ustawione, i perspektywami opatrzone, lewże są od tych, które mają prawidła nie ruchome. Zwiastuje że wiele na tym zawisło, aby kątomierz był zawsze po ziemi uławiony; a długie i trudne jest działanie, chcieć przywieść do iedney płaszczyzny na różnych płaszczyznach uważane.

Kątomierz na to służy, aby przezeń stopniami wyznaczyć kąty, które tylko liniami na stoliku oznaczone były. Ponieważ zaś narzędzie to bywa małe, tak dla więszey wygody, iak i -anności, przeto nie można oznaczyć na jego brzegu podziałów mniejszych od stopnia; przydał mu zwyczajnie na to miejsce podział inny, któryśmy wyżej nazwali *podziałem Noniusza*: aby tym sposobem i minut dochodzić można; przynajmniej do 3, 4, lub 5, według wielkości narzędzia; co dosyć jest w zwyczajnych na ziemi działaniach.

Niechby łuk koła, wzięty na brzegu prawidła ruchomego (który łuk powinien iak na standardziey przystawać do brzegu Kątomierza (i zawierający w sobie na przykład 12. stopniów, podzielony być na 12 części równych; każdy takowy p. dział

podział ten
pół 1. n
linię 5. n
podział, i
zwydą się z
drugich, z
razem bę ią
punkt nazw
to jest pu
prawidła.
z podział
stopniów
nie oznac
który czy
ten punkt
gu, kąt ka
dzie 5. 10.
wielkości
wyrażoney
podług teg
czy pierw
który nie z

Aby prz
głose punk

Trzeba
na podział
mier, na
aby prawid
tęż podia

podział tego łuku zawierać będzie stopień 1, minuty $\frac{1}{2}$. Stopnia, to jest minuty 5, minutami; a ztym, gdy dwa podziały, jeden prawidła, a drugi stopnia zeydą się z sobą; odległości pierwszych, drugich, trzecich i t. d. podziałów, wyrażać będą: 5, 10, 15, i t. d. minut. Gdy punkt naznaczony \circ , w podziale prawidła, to jest punkt odpowiadający 0° (Axis) prawidła, albo perspektywy schodzi się z podziałem brzegu Kątomierza, liczba stopniów na tym brzegu wyrażona, zupełnie oznacza w stopniach wielkość kąta, który czynią dwa prawidła. Ale gdy ten punkt nie schodzi się z podziałem brzegu, kąt którego szukamy, różnić się będzie 5, 10, 15, i t. d. minutami co do wielkości swojej, od liczby stopniów wyrażonej przy podziale najbliższym, podług tego jaki będzie podział prawidła czy pierwszy, czy drugi, czy trzeci i t. d. który się zeydzie z podziałem brzegu.

Aby przez Kątomierz wyznaczyć odległość punktu niedostępnego.

Trzeba najprzód, aby była wymierzona podstawa, położywszy potem Kątomierz, na końcu iednym podstawy, tak aby prawidło nieruchome przypadło na też podstawę, celnie drugim prawidłem rucho-

ruchomym, do punktu, którego położenie chcę wiedzieć. Toż czynię, i na drugim końcu podstawy; a tym sposobem będę miał dwa kąty wiadome przy podstawie.

Pociągnę dalej, na papierze, jakąkolwiek linią, któraby podstawę wyrażała, i zrobię przy niej dwa kąty z obu stron, równe kątom uważanym na ziemi. Punkt ten, w którym dwa tych kątów ramiona, przecinać się będą, pokaże na papierze połączenie punktu, którego szukam, i jego odległość od jednego z końców linii wyrażającej podstawę tak się mieć będzie do tejże linii, jak się ma punktu niedostępnego na ziemi odległość, od końca podstawy tantomu odpowiadającego, do samej podstawy. Pierwszy stosunek z podziałki wyznaczony będzie; a zatym wyznaczę się odległość żądana przez proporcją; której trzy pierwsze wyrazy będą wiadome; to jest: jak się ma linia wyrażająca podstawę na papierze, do podstawy na ziemi; tak się ma linia na papierze odpowiadająca odległości, której szukamy, do tejże odległości.

Gdyby dwa takie punkta były niedostępne, których odległości niewiemy; możnaby każdego z nich w szczególności wyzna-

wyrazczyć
wymierzono
się odpowied
rze wyraża
iącej także
któw dwoc
stoinek w
ma podstaw
ległości n
dostępnych

Jakażko
któw na z
czyć chci
kich rze
kra oddzie
wyżej ip
czyć, ipu
kra wzg
końców w
być mog
tym na pap
ległości co

Można
ryfować n
ziemi, kt
widz. alie
któw.

Gdyby
rych, polo

wyznaczyć położenie względem linii wymierzonej, i wziętej za podstawę; tak się albowiem mieć będzie linia na papierze wyrażająca podstawę, do linii wyrażającej także na papierze położenia punktów dwóch nie dostępnych; (który to stosunek wiadomy jest z podziałki) iak się ma podstawa na ziemi wymierzona, do odległości na ziemi dwóch punktów nie dostępnych.

Jakażkolwiek zgola byłaby liczba punktów na ziemi, których położenie wyznaczyć chcielibysmy, nie mierząc wżyskich tych odległości, któremi są te punkta oddzielone; można podobnym iak wyżej sposobem i odległość tę wyznaczyć, i położenie każdego z osobna punktu względem podstawy, z której dwóch końców wżyskie te punkta widziane być mogą; i według tego wyznaczyć potym na papierze tak położenia, iako i odległości odpowiadające ran tym punktom.

Można więc będzie tym sposobem odrysować mapę i obszerniejszej sztuki ziemi, której punkta do tego potrzebne widzialne są z dwóch iakich innych punktów.

Cdyby zaś nie wżyskie te punkta, których położenia wiedzieć chcemy, były
nie

nie dostępne, można w tym razie przemieścić się do dostępnych, i obracać jeden z nich, lub dwa za nowe punkty stanowiska (points stationis) to jest takie, z których położenie innych punktów, mogłoby być wyznaczone; i znowu wyznaczać położenia tych punktów, które albo z jednego tylko z pierwszych punktów stanowiska, albo z żadnego nie były widzialne; biorąc zawsze za podstawę odległość dwóch punktów, których położenie już wyznaczone jest przez rysunek. Można podobnym sposobem działanie to rozciągnąć, i do odryśowania miejsc oddalonych.

Lubo przepisy tu podane, są z siebie dokładne i jasne. atoli w wykonaniu ich, wielkiej baczności przykładać należy; bo inaczej, tym większe będą w rozmiarach błędy, i uchybienia, im odległości do mierzenia podane, są znaczniejsze, i działania w nich bardziej zawisłe jedne od drugich. Nie będziemy się tu bawić nad podawaniem drobniejszych w tej mierze uwag, i używających tym tylko uczniom szczególnie, którzyca powołanie wezwie w czasie, do pilnowania z Urzędu takowych działań. Znajda ci bardzo dobre do tego są ściągające nauki, w różnych książkach, między innemi w trzech Księ-

Księdze pod
różne prze
1770 wyda

300. Tę
rozmiarach
kary, które
zawiska nie
które sobie
punktach.
które zaw
liniami pro
ściawia, do r
powinna by
głose, które
trów takie, a
życzone, il
podstawie n
mniej malo
chybienie w
ciąga za sob
bokach, im
roki, ale i
kary przy p
bo też, gdy
od summy d
kim razie tr
dwa stanowi
kami, który
jest wyzrac
inne także,

Kłódze pod tytułem *Institutiones Mathematicae* przez X. Metzburga, w Wiedniu 1777, wydanej.

300. Tęgo się szczególniej w podobnych rozmiarach strzedz potrzeba, aby, tak te kąty, które uważamy przy punktach stanowiska nie były bardzo ostre, jako i te, które sobie wyobrazić w myśli można przy punktach, których położenia szukamy, i które zawarte byłyby między dwiema liniami prowadzącemi od punktów dwóch dacyi, do tam tych punktów. Dlatego postrzawa powinna być tym większa, im większa odległość, której szukamy, i położenie punktów takie, aby prostopadle od nich spuszczone, ile możności, przychodziły na podstawę nie przedłużoną, albo przynajmniej mało co przeciągniętą. Małe uchybienie w kącie, przy podstawie, pociąga za sobą tym większe uchybienie w bokach, im większe są nie tylko te same boki, ale i ich kwadraty; a zatem, gdy kąty przy podstawie są bardzo ostre, albo też, gdy ich summa niewiele się różni od summy dwóch kątów prostych, w takim razie trzeba odmienić jedno, lub oba dwa stanowiska. A jeżeliby między punktami, których położenie i odległość już jest wyznaczona, nie znajdowały się dwa inne takie, aby linia łącząca je zdarna

T

była

była do wyznaczenia innych punktów pozostałych, trzeba w takim razie brać punkt iakikolwiek mogący wygodnie służyć za stanowisko, z ostrożnościami wyżej wspomionemi; choćby nam z siebie niebył potrzebny do tego celu, któryśmy sobie szczerze i szczerze założyli.

Gdy w działania wchodzić muszą takie wymiary, z których jedne zawisły od drugich, należy przynajmniej być zapewnionym, że w ten związek działań nie wpłatały się błędy, z których rozmnożenia urołoby znacznie i takie uchybienie.

Przeto można w rzeczy samej wymierzyć odległość jedną z tych, których dośzliśmy z przeniesienia figury na papier, i uważać, czyli się nie różni od tey która wyznaczona była przez proporcya, której dwoma wyrazami były dwa boki na papierze, trzecim podawała na ziemi, a czwartym odległość szukana; albo też: wynalezioną odległość dwóch punktów, wziąć za podługę i szukać z niey położenia końca jednego z dwóch, pierwszy podługawy, tak właśnie, iak gdyby ta, była nam ielzcze niewiadoma; a gdy się pokaze, że z tego powtóronego działania wypadnie to samo położenie punktu, co z pier-

pierwszego, dzie, mo-
pewny, że
chybienia,
go; ponie-
łania, jed-
czy nie m-
poprawił.
się rzadko

Jakieżko
i dokładn-
czyli to w
w bram-
papier tye-
wałk. m. nie

Trudność
wynika, z
prze-odzi-
proporcyen
narzędziach
bę stopniów
liczbę minu-
darem zna-
nie będzie
30. minut
potęganie
których d-
od par-
1014 częs-

pierwszego, albo mało co różnić się będzie, można to mieć za dowód dość pewny, że w ciągu działań nie było uchybienia, przynajmniej znaczącego; ponieważ z dwójki takiego działania, jednakowe połączenie wypadłoby inaczej nie mogło; chyba żeby jeden błąd poprawił, a bardziej nagrodził drugi, co się rzadko trafia.

Jakażkolwiek jednak ostrożność będzie i dokładność w działaniach na gruncie, czyli to w wymierzeniu podstawy, czyli w braniu kątów; przeniesienie atoli na papier tych działań, będzie podlegać wielkim nie pewnościom.

Trudność ta ostatnia ztąd szczególniej wynika, że pewną liczbę stopniów brać przychodzi na przenośniku, albo cerklu proporcjonalnym. Na tych zaś dwóch narzędziach, ciężko jest wyznaczyć liczbę stopniów, a niepodobna wyznaczyć liczbę minut, które pospolicie w kącie danym znajdują się. Nuż tedy uchybienie będzie w połowie tylko stopnia, albo 30. minutach; ten nie wielki na oko błąd, pociągnie za sobą inny większy w liniach, których długość różnić się ztąd będzie od prawdziwej, 30stą, 20stą, aczalem i 10tą częścią tychże samych linii; a ten

błąd tym większe uchybienie w długościach, czyli wielkościach linii sprawi, im mnieysza względem nich była ta linia, którą wzięliśmy za promień. Zrzdło to omyłek mniej wpływać będzie w takowe uchybienia, gdy już nam zkad inąd wiadome są długości boków należących do Figur, które rysować mamy; a te długości są pospolcie zamiarem szczególniejszym działań mierniczych. Gdyby naprzykład: trafiło się, żeśmy w pół linii lub w całej linii uchybili, biorąc na podziałce iakąkolwiek długość, omyłka ta, która ztąd wyniknie, względem położenia na papierze linii figurę iaką zamalacych, będzie tym mnieysza, im dłuższe były linie, któreśmy przenosili.

Szukano więc sposobu, aby wszystkie działania na gruncie, tak można było przenieść na papier, żeby te wyrażały się w takich Troykątach, których boki byłyby nam wiadome; to jest żeby można odrysować na papierze z pomocą samey podziałki, figury podobne tym, któreśmy na gruncie uważali. Maiąc tedy daną liczbę ilości w liniach lub w kątach, dostateczną do wyznaczenia całego Troykąta, szukano sposobów, i znaleziono je, iakby ztąd doysć ilości pozostałych w liniach i kątach ieszcze nie wyznaczonych.

Część

Część Zi
pisy oale
alb. Troyka
izzeżat nie
iako tych
wizytlich
wane; zaw
m tiza Mar
para) prze
żna do Ma
żwa Meye
sk em (Ma
niki, alon
nich: co
a nayawey
Guzatnik
gulnic, i zec
czniców wy

Przygotow

POnieważ
mówić je
nich powi
ie przy to
re, uly trze
kwadratowe

301. Loz
dalące niez

Część Ziemomierstwa, która nas to przepisy dała, nazywa się Trygonometrią, albo *Trojkatmierzem*; ale dla tego, że szczegółu tej rzecz tam jest o Trojkątach, iako tych, od których wyrachowania wszystkich innych wielokątów wyrachowanie zawisło. Jest to część najznakomitsza Matematyki, nazwaney (Mathesis pura) przystosować ją bardzo często można do Matematyki, którą nazywać można *Mieszana*, i tacy za to nierzadko rozwijają (Mathesis mixta) iako to do Mechaniki, albo nauki o machinach, czyli filinich: do Optyki, a bo nauki o widzeniu, a naywięcej do Astronomii, czyli nauki Gwiazdanki: i dla tego ta część szczególniejszey uwagi i zainowienia się uczniów wyciąga.

Przygotowanie do Rozdziału następującego o Logarytmach.

POnieważ o Logarytmach dokładniey mówić nie potym będzie, tu tyle tylko o nich powiemy, ile potrzeba umieć, aby je przystosować można do rozwiązania reguły trzech, i wyciągnięcia pierwiastku kwadratowego.

321. Logarytmy, są to liczby odpowiadające liczbom całkowitym, i następnym,

1, 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. w ten sposób ; że te pierwsze liczby , czyli Logarytmy , iedne do drugich dodane, odpowiadają tym ostatnim, gdy są iedne przez drugie rozmnożone.

Y tak znaydziemy w tablicach logarytmowych przy liczbach - - -

- - - 2, i 3.
Logarytmy: 0, 3010300
0, 4771213

Jeh summa 0, 7781513, iest logarytmem liczby 6, która się robi z rozmnożenia 2, przez 3.

Wzwyczajnych tablicach logarytmowych, logarytmy liczb:

10,	- - -	1
	fą	
100;	- - -	2
1000	- - -	3
10000	- - -	4
i t. d.		i t. d.

Logarytmy liczb mniejszych od 10, ale większych od 1, są ułamki dziesiętne nie-
malące żadney liczby całkowitey.

Y tak

Y tak Lo

302 Po
liczby prz
nie sprawi
iedności,
mien c te
gartytm w

Logaryt
iedność z
tnemi.

Legaryt
miedzy 10
kowite pie
z przydm

Znak pie
witey, iest
logarytmu,
wielu znak
której iest
kład, znak
4, i t. d.

Y tak Logarytmy liczb:

2,	-	0.3010300.
	fa	
3,	-	0.4771213.
4,	-	0.6020600.
5,	-	0.6989700.
i t. d.		i t. d.

302 Ponieważ zaś rozmnożenie jakiej liczby przez 1, żadney odmiany w niej nie sprawia; prz to i dodanie logarytmu jedności, do logarytmu tej liczby, odmienić tego logarytmu nie powinno; Logarytm więc jedności jest zero albo 0.

Logarytmy liczb między 10, i 100. są: jedność z przydanemi ułomkami dziesiątnymi.

Logarytmy liczb między 100, i 1000, między 1000, i 10000, i t. d. są liczby całkowite pierwszych, 2. drugich, 3. i t. d. z przydanemi ułomkami dziesiątnymi.

Znak pierwszy logarytmu liczby całkowitey, jest częścią najznakomitszą tegoż logarytmu, ponieważ daje poznać z jak wielu znaków składa się liczba całkowita, który jest logarytmem. Tak naprzykład, znak logarytmu pierwszy: 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. daje poznać, iż liczba, kró-

którey odpowiada, zawiera się między 1, a 10, albo między 10, a 100, albo między 100, a 1000, albo między 1000, a 10000, albo między 10000, a 100000. i t. d. to jest ma w sobie jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, i t. d. znaków liczb całkowitych. Dla tego też pierwszy znak Logarytmu nazywa się jego *Cechą* (*Characteristica*).

303. Gdy dwa logarytmy, mają jedną-kowę ułomki dzielące, d) a cecha ich tylko jest odmienna; w takim razie liczby im odpowiadające, są 10, 100, 1000, i t. d. razy większe jedna od drugiej, podług tego, jak cecha ich logarytmu większa będzie jedna od drugiej, dwiema, trzema i t. d. jednoscianą. Y tak logarytm liczby 20, 200, 2000, i t. d. będzie, 1, 3010300, 2, 3010300, 3, 3010300 i t. d. to jest, będzie ten sam, co i Logarytm liczby 2, przydawszy mu Logarytm liczb 10, 100, 1000 i t. d.

Trzeba przez kilka przykładów wprowadzić Ucznia w to pierwsze działanie; biorąc takie liczby, któreby nie większe były, od największej liczby tablic logarytmowych.

304.

(d) Te ułomki w logarytmie, nazywają *Antyrowie piszący po Łacinie: Mantissa*.

304 Prz
32. Log: 1

Log.

Summa

Y ta Sum
liczby roz
koż w tabl
garytmie,
896; któr
czy z rozm

Przykład
16, 24, 26,

Log:

Log:

Log-

Summa Log

Y to jest i
wypada z ro
24, 26.

305. Pon
jest to sum
na; więc lo

304 *Przykład 1.* Rozmnożyć 28 przez 32.

Log: liczby 28 - 1,4471580.
 jest

Log. 32 - 1,5051500.

Summa Log. - - 2,9523080.

Y ta Summa powinna być logarytmem liczby rozmnożoney z 28 przez 32. Ja-koż w tablicach logarytmowych przy lo-garytmie, 29523080, znajdziemy liczbę 896; która to liczba wypada w samey rze-czy z rozmnożenia 28 przez 32.

Przykład 2. Rozmnożyć trzy liczby: 16, 24, 26,

Log: 16, - 1,2041200,

Log: 24, - 1,3802112.

Log- 26, - 1,4149733.

Summa Log: - 3,9993045.

Y to jest logarytm liczby 9984, która wypada z rozmnożenia trzech liczb: 16, 24, 26.

305. Ponieważ kwadrat jakiej liczby, jest ta sama liczba przez siebie rozmnożo-na; więc logarytm tego kwadratu, będzie rów-

równy logarytmowi liczby z której kwadrat powstał, dwa razy wziętemu.

Przykład 1. Log: 2, - 0.3010300.

Tenże dwa razy wzięty 0,6020600, będzie logarytmem kwadratu z 2, to jest 4.

Przykład. 2, Log. 56 - 1.7481880.
Dwa razy wzięty: - - 3.4963760.
będzie Logarytmem kwadratu z 56, - - to jest 3136.

306. W dzieleniu; liczba podzielna równa się liczbie dzielącej, przez wieloraz rozmnożonej; a zatem logarytm liczby podzielonej, równa się logarytmowi liczby dzielącej dodanemu do logarytmu wielorazu; a ztąd logarytm tego wielorazu, będzie różnicą między logarytmami liczby podzielnej i dzielącej.

Przykład. 1. Podzielić 6, przez 2,

Log: 6. - 0.7781513.
Log: 2. - 0.3010300.

Różnica - - 0.4771213. jest logarytmem wielorazu, to jest 3.

Przykład.

Przykład.

Log:

Log:

Różnica
logarytmem

307. W
dwa przez
ikraynym p
to w Arytm
cyach wyw
nych liczb
liczby w te
żone, przez
tym i logar
wynaydziem
rytów dw
drugiej lic

Przykład
45, iżni p
mym czab
ną uł.nosci

Log:

Log:

Summa

L. s.

Różn
logarytme

Przykład. 2. Podzielić 1632 przez 34.

$$\begin{array}{rcl} \text{Log: } 1632 & - & - & 3.2127202 \\ \text{Log: } 34 & - & - & 1.5314789 \\ \hline \end{array}$$

Różnica - - 1.6812413. jest
logarytmem wielorazu, to jest. 43.

307. W proporcji: średnie liczby, jedna przez drugą rozmnożone, rowne są skrajnym podobnie rozmnożonym, jako to w Arytmetyce i w Rozdziale o proporcjach wywiodliśmy. Przeto jedną z skrajnych liczbę znajdziemy, dzieląc średnie liczby w ten jak wyżej sposób rozmnożone, przez drugą liczbę skrajną: aza- tym i logarytm liczby jednej skrajney wynawdzemy, odiawizy od summy loga- rytarów dwóch liczb średnich, logarytm drugiej liczby skrajney.

Przykład. 1. 35 Robotników, zrobiło 45, sążni pewney roboty, ileż w tym sa- mym czasie zrobi 42, robotników zrów- ną ułnością pracujących?

$$\begin{array}{rcl} \text{Log: } 42 & - & 1.6232493. \\ \text{Log: } 45 & - & 1.6532125 \\ \hline \text{Summa} & - & 3.2764618. \\ \text{Log: } 35 & - & 1.5440680. \\ \hline \end{array}$$

Różnica - 1.7323938. jest
logarytmem żądanym, liczby 54.

308. Zamiast odejmowania, któreby należało czynić w logarytmach, używa się wygodnie dodawania w ten sposób: Logarytm liczby dzielącej, a bardziej jego cecha, odejmuje się od liczby całkowitej 10, i reszta dodaje się do logarytmu liczby podzielnej, a od summy, znowu się 10 odcina.

Defin. Różnica logarytmu liczby jakiej od 10, nazywa się *dopełnieniem* (complementum) tego logarytmu.

Przykład. Podzielić 6. przez 2.

Log: 6.	-	0.7781513
Log: 2, 0.3010300	dopełnienie tego log:	9.6989700
Summa	-	10.4771213
Log: wielorazu	-	0.4771213
jest Log: 3,		

Podzielić 1632 przez 34.

Log. 1632 3.2127202.

Log: 34, 1.5314789. Dopełn:

Log: 34	1.5314789
Summa-	11.6812413.
Log: wieloraz:	1.6812413.
jest Log: 48.	

Ten

Ten sposób jest wygodny do odjmowania w logach, omyłk zaś niewielkie wprawie mowanie, k miania dope potym doda mówać się n

Przykład. fażni, ileż z

Dopełnienie

Summa które zmniejszona

Przykt. 2. 1344, a drugi zamienić na którego bok kci?

Ten sposób postępowania osobliwiej jest wygodny w Regule Trzech, gdzie odejmowanie następujące, po dodawaniu, mogłoby w długich zwłaszcza rachunkach, omyłki jakieś dać okazać. Można zaś i niewielką nawet w rachowaniu mając wprawę, na pamięć czynić to odejmowanie, które potrzebne jest do otrzymania dopełnienia logarytmu, które się potem dodać na miejsce logarytmu odejmować się mającego,

Przykład. 35 Robotników, zrobiło 45 sążni, ileż zrobi 42 robo?

Log: 42 1.6232493.

Log: 45 1.6532125.

Dopełnienie Logaryt. 35 8.4559320.

Summa której cecha
zmniejszona liczbą 10. 1.732,3938.

Przykl. 2. Bok jeden prostokąta ma 1344, a drugi 1445, łokci. Trzeba go zamienić na inny prostokąt iemu równy, którego bok jeden ma zawierać 1440. łokci?

Log:

Log: 1344 - 3.1288903
Log: 1445 - 3.1628630

Summa - 6.2912623.

Log: 1440 - 3.1583625.

Różnica - 3.1328998. iest

Logarytmem liczby, której szukaliśmy
to iest 1358.

309. Ponieważ Logarytm Kwadratu,
dwa razy iest więkfszy, niż logarytm pier-
wiaſtku; przeto logarytm pierwiaſtku;
iest połową logarytmu kwadratu. Aby
tedy wyciągnąć z liczby pierwiaſtek kwa-
dratowy, trzeba wziąć połowę logaryt-
mu tej liczby.

Przykład, 1. Wyciągnąć pierwiaſtek
kwadratowy z 4.

Log: 4. - 0.6020600.

Połowa - 0.3010300. iest loga-
rytmem pierwiaſtku, to iest 2.

Przykt. 2. Wyciągnąć pierwiaſtek
kwadratowy z 7569.

Log. 7569. - 3.8790385.

Połowa - 1.9395192. iest lo-
garytmem pierwiaſtku, to iest 87.

Przykt. 3.
672. jakież bę-
nego w pow

Log:

Log:

Sum

Polow
garytmem

910, Co
dziejają; th

Niech będa
logarytm: 3
liczbę przy
wzięt m
celze iwa
by 176. 4.
fcdame a
Log: 1, 67

Dzieląc 176
lorazu, to i
miej 29 3
garny licz
Coty tak
10000, 1000
my wieloraz

Przykt. 3. Boki prostokąta są: 378, i 672, iakiż będzie bok kwadratu iemu równego w powierzchni?

Log: 378 - 2.5774918.

Log: 672 - 2.8273693.

Summa - 5.4048611.

Połowa - 2.7024305. iest logarytmem liczby szukaney to iest 504.

310. Co się tyce logarytmów ułomków dziesiętnych.

Niech będzie liczba nap: 1764. którey logarytm: 3.2464986. I dzieliwszy tę liczbę przez 10. logarytm wielorazu powinien mieć jedną jednośćą mniej w ceeze swojej (303.) Logarytm tedy liczby 176. 4. będzie - 2.2464986.

Podobnie log: 17. 64. będzie 1.2464986. Log: 1,764 - 0,2464986.

Dzieląc 1764. przez 1000. logarytm wielorazu. to iest liczba 1,764. na ceebę mniej za 3 jednośćami, niżeli miał logarytm liczby 1764. nie podzieloney. Gdyby tedy przyszło. 1764 dzielić przez 10000. 100000. 1000000. i t. d. Logarytmy wielorazów, to iest ułomków dziesiętnych:

nych: 0, 1764. 0, 01764, 0, 001764 i t. d. powinnyby mieć 4, 5, 6, i t. d. jednościami mniejszą cechę, niżeli miał logarytm liczby 1764, nie podzieloney. Ze zaś Cecha logarytmu liczby 1764, iest: 3, a Cechy logarytmów liczb: 10000, 100000, 1000000, i t. d. są: 4, 5, 6, i t. d. to iest liczby większe od 3, od których ie odeymować przypada. więc dla większey w odeymowaniu wygody uważa się, iakoby cecha 3, powiększona była 10 jednościami, i dopiero od tak powiększoney odeymują się cechy liczb dzielących: 10000, 100000, 1000000. i t. d. to iest cechy: 4, 5, 6, i t. d. pamiętając zawsze nato przydanie, i zmniejszając znowu resztę, to iest logarytm wielorazu tąż liczbą: 10; Będzie więc $\log \frac{1}{1764} =$ albo 0,1764 $=$ 13, 2464986 $-$ 4 (e) $=$ 9, 2464986, to iest dla dodanych 10, do cechy 3, będzie w samey rzeczy $=$ 9, 2464986 $-$ 10. Tak też Log: 0,01764, będzie $=$ 8, 2464986 $-$ 10. Log. 0, 001764 będzie $=$ 7, 2464986 $-$ 10. i t. d.

Przy-

(e) Znak — kładzie się przed tą ilością nap. przed tą liczbą, która ma być od drugiej odjętą.

Przykład

Log:

Log:

Summ

12, to iest 1
żenta 24 p

Przykład

Log:

Log:

Summa
garytmem li

Ten logar
cach logaryt
znajdnie z
ba: 12; a za
będzie 10 ra

Przykład

Log:

Log:

Reszta, i
lorazu, to ie

Przykład 1. Rozmnożyć 24 przez 0,5.

$$\text{Log: } 24 = 1,3802112.$$

$$\text{Log: } 0,5 = 9,6989700. - 10.$$

Summa = 1,0791812. = Log: 12, to jest liczby wypadającej z rozmnożenia 24 przez 0,5.

Przykład 2. Rozmnożyć 24 przez 0,05.

$$\text{Log: } 24 = 1,3802112.$$

$$\text{Log: } 0,05 = 8,6989700. - 10.$$

Summa = 0,0791812. jest logarytmem liczby rozmnożonej.

Ten logarytm nie znajduje się w tablicach logarytmowych z cechą, 0, ale się znajduje z cechą 1, i odpowiada mu liczba: 12; a zatem liczba, której szukaliśmy, będzie 10 razy, mniejsza to jest: 1,2.

Przykład 3. Podzielić 32 przez 0,5.

$$\text{Log: } 32 = 1,5051500.$$

$$\text{Log: } 0,5 = 9,6989700. - 10.$$

Reszta, 1,5061800 jest logarytmem wielorazu, to jest liczby 64.

V

Odey-

Odeymuiąc 9,6989700, od 1,5051500, odeymowalibyśmy 10 razy więcej, niż potrzeba; więcby to 10 do reszty przydać należało. Na iedno zaś wyidzie, gdy te 10, któremi iest powiększona liczba mająca Cię odeymować, przydamy też i do liczby, od ktorey ją odeymować przypada; to iest gdy odeymuiemy 9,6989700 od 11,5051500.

Przykt. 4. Podzielić 144, przez 0,06.

$$\text{Log: } 144 = 2,1583625.$$

$$\text{Log: } 0,06 = 8,7781513 - 10.$$

Rożnica - - 3,3802112. iest logarytmem wielorazu, to iest liczby: 2400.

Co do ułomków zwyczajnych.

311. Ponieważ ułomek uważać można, jako oznaczający dzielenie licznika iego przez mianownika; będzie zatym logarytm ułamka równy różnicy między logarytmem licznika iego i mianownika.

Niech będzie naprzykład ułomek nie właściwy $\frac{2}{3}$.

Log:

Log:

Log:

Rożni

Można t
ułka dz
będzie albe

Azatym

312. gdy
iest gdyby
mianownika
nka byłby
mianownika
garytm mia
ka, pożycz
iak wyżey

Przykład

Log:

Log:

Log:

Log: 7. - 0,8450980.

Log: 5 - 0,6989700.

Różnica - 0,1461280 = Log: $\frac{7}{5}$.

Można się o tym przekonać używwszy ułomka dzieła: tego zamiast ułomka $\frac{7}{5}$, będzie aiłowiem $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} = 1,4$.

Log: 14 - 1,1461280.

Azatem Log. 1,4 - 0,1461280.

312. gdyby ułomek był właściwy, to jest gdyby licznik jego był mniejszy od mianownika; wtakim razie logarytm licznika byłby też mniejszy od logarytmu mianownika; Aby więc można odjąć logarytm mianownika od logarytmu licznika, pożyczamy 10. temu logarytmowi iak wyżej (310) w podobnym przypadku.

Przykład 1. Niech będzie ułomek: $\frac{2}{5}$.

Log: 2 = 0,3010300.

Log: 5 = 0,6989700.

Log: $\frac{2}{5}$ = 9,6020600. — 10.

Log: V 2 Przy-

Przykład 2. Trzeba znaleźć Log: $\frac{7}{11}$.

$$\text{Log: } 7 = 0,8450980.$$

$$\text{Log: } 11 = 1,1760913.$$

$$\text{Log: } \frac{7}{11} = 9,6690067. - 10.$$

Przykł: Trzeba znaleźć log: $\frac{1}{25}$

$$\text{Log: } 1. = 0,0000000.$$

$$\text{Log: } 25 = 1,3979400.$$

$$\text{Log: } \frac{1}{25} = 8,6020600. - 10.$$

Zdać się, iżby przytęło używać odmiennego jakiego znaku cechy, gdy ta należy do logarytmu odpowiadającego ułomkowi; aby ją zaraz na weyrażenie różnić można od cechy logarytmu, który liczbie całkowitej odpowiada.

313. Kiedy logarytm jaki, nie znajdując się w Tablicach, można wtedy liczbę, której odpowiada wyznaczyć, albo z zupełną dokładnością, albo z małym uchybieniem.

Przykł: 1. Jakiż jest wieloraz 5, przez 4 podzielonych?

$$\text{Log: } 5 = 0,6989700.$$

$$\text{Log: } 4 = 0,6020600.$$

$$\text{Różnica} = 0,0969100.$$

Logarytm dwóch pier-
dnie się w T
cną 1; ale t
onemu od
ten logaryt
dzie odpow
szey, to ie

Przykł.
299, mają
rozciągają
których na

Log:
Tenże po

Drugiego
zwyczajny
fzmy więc i
garytm zm
do wżysk
się w tablica
do pierwz
Log: 3,9513

Pierwz
ających się z
liczby 89,4
89,4
A z tym
dzie między
- - i

Logarytm ostatni oznaczający różnicę dwóch pierwszych logarytmów, nie znajduje się w Tablicach ani z cechą 9, ani z cechą 1; ale się znajduje z cechą 2; liczba onemu odpowiadająca jest: 125; ale że ten logarytm ma cechę 2, więc nasz będzie odpowiadał liczbie 100 razy mniejszej, to jest: 1,25.

Przykł. 2. Trzeba znaleźć kwadrat z 299, mając tylko Tablice Log. nie daley rozciągające się, jak do 10000, to jest takie, których największy Log. jest: 4000000.

Log: 299 - - 2.4756712.
Tenże podwojony - 4.9513424.

Drugiego tego logarytmu w tablicach zwyczajnych nie znajdziemy. Zmniejszmy więc jednością cechę jego: Ten Logarytm zmniejszony 3.9513424, lubo co do wszystkich liczb swoich, nie znajduje się w tablicach, znajdziemy go jednak co do pierwszych; i mało co większy jest od Log: 3.9513375. a mniejszy od 3.9513861

Pierwszy z tych logarytmów znajdujących się zupełnie w Tablicach, jest Log: liczby 8940, a drugi Log. liczby - -
- 8941.

A zatem liczba, której szukamy, będzie między 8940 - - -
- - i - 89410.

Logarytm dany przewyższa logarytm pierwszy Tablicowy liczbą 49; mniejszy zaś jest od drugiego logarytmu Tablicowego liczbą 437. Ta tedy której szukamy liczba, powinna daleko więcej zbliżyć się do 89400, niż do 89410.

Widziemy z Tablic, że kilka logarytmów, które następują po logarytmach liczb 8940, 18941, mają tę samą, co i te logarytmy różnicę, to jest 486; tak, iak i różnica liczb im odpowiadających jest taż sama, to jest 1; a zatym jeżeli różnica między logarytmem danym i logarytmem Tablic iemu naybliższym, jest naprzykład połową, lub trzecią częścią, lub czwartą, i t. d. różnicy między tymże naybliższym logarytmem, i drugim, zaraz po nim, następującym, to też i różnica między liczbą odpowiadającą logarytmowi danemu, a liczbą odpowiadającą logarytmowi naybliższemu, będzie prawie połową trzecią częścią, czwartą i t. d. iedności, która jest różnicą między dwiema liczbami naturalnemi, po sobie idącemi. Ze tedy różnica 49, jest prawie $\frac{1}{4}$ części różnicy 486, więc i różnica liczby szukanej dla dodatku liczbie 8940, będzie dziełiątą częścią iedności, to jest 0, 1; a zatym liczba odpowiadająca logarytmowi 3.9513424 będzie prawie 8940, 1, liczba zaś

zaś odpow
dzie, 8940
kaliśmy.

Poniewa
nym zakon
iż kwadrat
było bez ta
teyże liczb

314. Cz
mów po
mniejszy
one odpow
żyć.

Różnica
19, jest 45

Różnica
i 90, jest ta
ale ta róż
mniejszych
liczb 90, i
- - 99 i

Różnica
i 1000, jest
garytmami
= $\frac{1}{2}$) ale
tych dalek
liczb 900,
999 i 1000

zaś odpowiadająca Log: 4.9513424, będzie, 89401, to jest kwadrat, którego szukaliśmy.

Ponieważ w tym przykładzie szczególnym zakończenie liczby 299 pokazuje, iż kwadrat iey ma się kończyć na 1, można było bez tak długiego rozumowania doysć teyże liczby kwadratowej: 89401.

314. Czemu różnica dwóch logarytmów po sobie następujących jest tym mnieysza, im są więkksze liczby, którym one odpowiadają, można to tak wyłożyć.

Różnica logarytmów dwóch liczb: 10, i 9, jest: 457575.

Różnica logarytmów dwóch liczb 100, i 90, jest ta sama; (ponieważ $\frac{100}{90} = \frac{10}{9}$;) ale ta rozkłada się na dzieścięć innych mnieyszych różnic między logarytmami liczb 90, i 91, 91 i 92, 92 i 93 - - - 99 i 100.

Różnica między logarytmami liczb 900, i 1000, jest znowu ta sama co i między logarytmami liczb 10 i 9. (ponieważ $\frac{1000}{900} = \frac{10}{9}$;) ale ta rozkłada się na 100 mnieyszych daleko różnic między logarytmami liczb 900, i 901, 901 i 902, 902 i 903 - 999 i 1000,

Podobnie i różnica logarytmów liczb 9000 i 10000, lubo ta sama jest, co między logarytmami liczb 9 i 10, ale się rozkłada na 1000. innych różnic maiejszych, i t.d.

315. Używanie logarytmów jest bardzo przydatne w wyciąganiu pierwiastków z ilości nie spółmiernych.

Przykład 1. Trzeba wyciągnąć przybliżony pierwiastek kwadratowy z 2:

Log: 2. = 0.3010300.

Połowa tego Log - - - 0.1505150.

Szukaymy tej połowy z cechą 3. Logarytm najbliższy w tablicach będzie: 3.150494, który odpowiada liczbie: 1414. Aże ten logarytm jest mniejszy od 3.1505150, więc liczba odpowiadająca logarytmowi danemu będzie między 1,414 i 1,415. Kwadraty zaś tych ostatnich liczb są: 1,99476; i 2,002305.

Abv pierwiastek bardziej iefzcze przybliżyć do prawdziwego, weźmy różnicę 656. między logarytmem danym, i najbliższym z tablic; i znowu weźmy drugą różnicę 3070 między dwoma tablic logaryt-

garytmami
łomek 1/10
ny. będzie m
lne: 21; azat
bliżony se
więcej, gdy
bnych przy
cząc daley
wiałek ten
bliżony.

Przykt.

bliżoną do

Log. 5. - 0.0

Log: 2. - 0.3

Ostatni lo
odpowiada

przydaną: 3

równa się pr

garytmami, danemu najbliższemu. Ułamek $\frac{1}{2}$, na dziesiątne części obrócony, będzie miał pierwsze dwa znaki liczbowe: 21; a zatem pierwszy ekwidaziew przybliżony będzie: 1,41421. Można by i więcej, gdyby kto chciał znaków liczbowych przydać w tym pierwiastku, kończąc dalej dzielenie, a tym więcej pierwiastek ten byłby do prawdziwego przybliżony.

Przykt. 2. Trzeba znaleźć liczbę przybliżoną do następującego wyrazu: $\sqrt[5]{2}$.

Log. 5. - 0.6989700; $\frac{1}{5}$ Log: 5 - 0.3494850.

Log: 2. - 0.3010300; $\frac{1}{5}$ Log: 2 - 0.1505150

Różnica - - 0.1989700

Ostatni logarytm oznaczający różnicę, odpowiada prawie w tablicach z cechą przydaną: 3, liczbie; 1581, a zatem $\sqrt[5]{2}$ równa się prawie 1,581.

ROZDZIAŁ XII.

O Trygonometriji.

316. Wystawmy sobie Troyką w koło wpisaną. Boki tego Troyką byłyby cienciwami łuków przeciwnych jego kątom. Aże miarą tych kątów są połowy tychże łuków; więc boki tego Troyką będą cienciwami łuków dwa razy większych, niżeli są te, których ważność w stopniach ta sama jest, co i kątów im przeciwnych.

Jdzie zatem, że gdybyśmy mieli ułożoną z figury dokładney, lub z rachunku Tablicę cienciw do łuków wszystkich koła, zacząwszy naprzykład od łuku jednej minuty aż do 180 stopniów (którego to ostatniego łuku cienciwa jest największa) już tym samym i stosunek boków Troyką znaleźlibyśmy z danych kątów jego; i wzajemnie (lubo nie tak prosto) doszlibyśmy ważności w stopniach kątów, z danych boków Troyką.

317. Aby uniknąć brania połowy, lub wedwoyna sob kątów Troyką, szukam zamiast cienciw innych linii, do których boki Troyką byłyby proporecyonalne. i takich; któreby się właściwie ściągały do kątów tegoż Troyką. Kąt w środku koła

koła opisanego
ramionami f
wą jest bok
mówię taki
go, który
stoi tegoż
byśmy ten
na dwie ró
byłaby rów
Bok tenż
do linii pr
części; a
również rów
sować mo
tego Troy
no sobie b
tów im prz

318. Da
kolwiek, i
łuku, sp
przechodzą
łuku, ta p
(f) a po P

(f) Wyraz
swoy po
zywa się
semilis
może da



koła opisanego na Troykacie, zamykający ramionami swemi ten łuk, którego cienciwą jest bok jeden tegoż Troykąta, kąm mówię taki, dwa razy jest większy od tego, który przy okragu koła naprzeciw, stoi tegoż boku Troykąta; a zatem gdybyśmy ten kąt w środku, przecieli linią na dwie równe części, jedna takowa część byłaby równa tamtemu kąrowi Troykąta. Bok tenże Troykąta oytby prostopadły do linii przecinałacey kąt na dwie równe części; a ta linia przeciełaby go na dwie także równe części; Toż samo przytossować można i do innych dwóch boków tego Troykąta. W ten sposób wystrawiono sobie boki Troykąta, względem kątów im przeciwnych,

318. *Defin.* Wziąwszy łuk koła iakikolwiek, ieżeli od iednego końca tego łuku, spuścimy prostopadłą na promień przechodzący przez drugi koniec tegoż łuku, ta prostopadła ma nazwisko *Sinus* (f) a pò Polsku nazwać ją można *Wstawą*
tego

(f) *Wyraz ten Sinus* ztąd podobno ma *swoy początek: Połączenie* Cienciwa *nazywa się* *Inscripta*; a połowa cienciwy, *femissis Inscriptæ*; dla skrócenia, *pisano* może dawniey *S. Ins.* *Przepisujący iakie*

tego łuku, że się wstawia między końcem iednym łuku, kąt mierzącego, i między promieniem przez drugi koniec tegoż łuku przechodzącym,

Tab. XVIII. Niech będzie AB łuk koła; prostopadłą BD, spuszczoną od konca B tego łuku, na promień CA, przechodzący przez drugi jego koniec A, nazywać będziemy *wstawą* tego łuku.

319. *Wniosek 1.* Wstawą łuku równa się połowie cięciwy łuku innego, dwa razy większego, iak na przykład Wstawą BD, łuku BA, równa się połowie cięciwy BE, łuku dwa razy większego BAE.

320. *Wniosek 2.* Wstawy łuków rosną od 0, aż do 90°, a ponieważ wstawą stopniów 90, równa się promieniowi, i jest największą, nazywa się dla tego *Wstawą całą* (Sinus totus.)

321. *Wniosek 3.* Wstawy łuków większych od czwartej części okrągu koła, zmniejszy-

dzielo Matematyczne. nie wiedząc znaczenia wyrazu tego skroconego, opuścić punkt oddzielający te dwa wyrazy, i dawszy słowu Sinus zakończenie łacińskie, napisać Sinus, i stąd potym wzięte podobno było to nazwisko.

zmniejszyła
od 90° aż do
stopniów 180°
kazeo łuku
z tego od 180°
mniejszyego
pierwszy
Wstawą łuk
80° wstawą
60° it. d. T
alto do p
łacinie Sinu

Co się t
okrągu koła
wić w tych

322. Wstawy
na przykład
ze wstawą
90°, Wstawą
go od czwartej
ta sama, co
czwartej czę
to łuk czterech
okrągu) iad
błicy na wstaw
wstawy tych
od 90°.

323. Wstawy
bnych, w

zmniejszą się coraz bardziej zaczawszy od 90° aż do 180° : tak dalece że Wstawą stopniów 180° równa się $\frac{1}{2}$. Wstawą zaś każdego łuku większego od 90° , a mniejszego od 180° jest ta sama, która i łuku mniejszego od 90° , a Spełniającego łuk pierwszy do 180° . Y tak na przykład Wstawą łuku 100° , taż sama jest co i łuku 80° wstawą łuku 120° ta sama, co i łuku 60° it. d. Takowe *Spełnienie* łuku do 180° albo do pół okrągu koła, nazywa się po łacinie *Supplementum arcus*.

Co się tycze łuków większych od półokrągu koła, o tym niema potrzeby mówić w tych początkach.

322. *Wniosek 4.* Ponieważ promień na przykład CF, jest Wstawą największą ze wszystkich, czyli Wstawą stopniów 90° , Wstawą zaś od łuku Afb, większego od czwartey części tego okrągu, jest ta sama, co i łuku it. mniejszego od czwartey części tegoż okrągu; (który to łuk ostatni Spełnia pierwszy do półokrągu) idzie zatem, że do ułożenia Tablicy na wstawy łuków daley wyznaczyć wstawy tych łuków, które są mniejsze od 90° .

323. *Wniosek 5.* Wstawy łuków podobnych, w kołach odmiennych, tak się mają

maią do siebie, iak tychże koł promienie. Jeżeli tedy mamy Tablicę wstaw podług promienia podzielonego na pewną liczbę części równych; wynaydziemy przez regułę trzech i wystawy podobnych łuków, podług innego promienia.

324. *Wniosek 6.* Ponieważ kąt w środku, naprzykład ACB, tyle stopniów w sobie zamyka, co i łuk AB, który go mierzy, i jest mu proporcjonalny; będzie więc wstaw łuku AB, Wstawą także i kąta ACB.

Wstaw tedy kąta, jest prostopadła, spuszczone od punktu iakiego w iednym z ramion iego, do drugiego ramienia, biorąc za promień odległość tego punktu od wierzchołka kąta, Cokolwiek zatym powiedziało się o wstawach łuków, wszystko to przystofować można i do wstaw kątów: Ytak, Wstawy kątów rosną od 0, aż do wstawy 90°; która się równa promieniowi; zmniejszają się znowu zaczawszy od wstawy 90°, aż do wstawy 180° (która jest = 0;) i wstaw kąta roztwartego, ta sama jest, co i kąta Ostręgo, który tamtego spełnia, do 180°.

Wstawy równych kątów, są do siebie, iak linie wzięte za promienie.

A jeżeli

A jeżeli
kątów, wzgł
nia, czyli W
do siebie mie
że dwóch ka

325. Twi
cie boki tak
kątów prze

Niech bę
naprzykład
= iak wsta

Dowodzi
Troykacie
średnicę CD
BDC, BAC s
zamykają
łuk BC. D
także i kąty
kąty: ChD.
kole; więc
mi kątów: C
samey wsta
CD; a zatym
te linie, iak

Można
tego, jamego

A jeżeli dwie linie są wstawami dwóch kątów, względem tegoż samego promienia, czyli Wstawy całej; te linie tak się do siebie mieć będą, iak Wstawy tychże dwóch kątów.

325. *Twierdz. 1.* W każdym Troykącie boki tak się mają do siebie, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokom.

Niech będzie Troyką ABC ; bok iego *Fig. 2*
naprzykład AC , tak się ma do boku BC
— iak wstawa kąta B , do wstawy kąta A .

Dowodz: z wykreśleniem. Na danym Troykącie opiszmy koło, i poprowadźmy średnicę CD , i cięciwy DA , DB . kąty: BDC , BAC są równe, bo są w okrągu, i zamykają ramionami swemi iednakowy łuk BC . Dla teyże przyczyny równe są także i kąty: ADC , AEC . Oprócz tego, kąty: CbD , $CA D$ są proste, bo są w półkole; więc linie CB , CA , będą wstawami kątów: CDB , CDA względem teyże samey wstawy całej, czyli promienia CD ; a zatem tak się mieć będą do siebie te linie, iak wstawy kątów A i B .

Można ieszcze i następującym sposobem, tego samego dowieść.

Opi-

Opisawizy koło na danym Troykacie; połowy boków iego, będą wstawami połowy kątów w środku im przeciwnych, a zatem będą też i wstawami kątów Troykątą przeciwnych tymże bokom; (biorąc za Wstaw całą, promień tego koła.) Są tedy do siebie połowy tych boków, iak wstawy kątów im przeciwnych, aże połowy tak się mają do siebie, iak ich całości; więc też i całe boki Troykątą, tak się do siebie mieć będą, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokom.

326. *Wniosek.* Za pomocą Tablicy na Wstawy ułożoney, podług promienia iakiegokolwiek, można doysć stofunku boków Trojkąta, którego katy są nam już wiadome; azatym, gdy iefzcze i bok ieden tegoż Trojkąta iest wiadomy, będzie można znaleźć i dwa inne jego boki.

327. Jakoż rachowano i ułożono Tablicę Wstaw, podług promienia podzielnego nap: na 100000 części równych. Ten a nie większy podział, zwłazcza w tablicach do zwyczajniejszego używania ułożonych, znajduie się. Zeby zaś rachunek krótszym i łatwiejszym uczynić, przydano i tablicę logarytmów, Wstaw tychże. W takowych jednak tablicach, gdzie i logarytmy wstaw znajduia się, uważa-

328. Summa kwadratów, z Wstawy, i z dostawy łuku, albo kąta, równa się kwadratowi promienia, czyli wstawy całej.

Fig. 1. Bo ponieważ dwa łuki: nan. AB, i FB, (albo dwa kąty: ACB, i FCB) są dopełnieniem jeden drugiego; Wstawy BC: łuku FB, równa jest linii CD; kwadrat zaś linii CD z kwadratem wstawy BD, równa się kwadratowi promienia BC, więc i summa kwadratów z BG i BD, równa będzie kwadratowi promienia BC.

329. *Przyłożenie.* Mając na polu wymierzoną podstawę, i kąty która czyni podstawę z dwiema liniami wykierowanemi ku jednemu celowi. znaleźć tych ostatnich dwóch linii długość?

Fig 3. Niechby Trójkąt ABC, wyrażał Trójkąt rapolu, zawarty między podstawą wymierzoną i dwiema liniami dążącemi ku jednemu celowi.

Niech będzie $AB = 1200$

$A = 50^\circ$

$B = 72^\circ$

więc $A + B = 122^\circ$

a zatem $180^\circ (A + B) = 58^\circ = C$.

Wstawy kąta C: Wstawy kąta A = $AB : BC$

wsta: C: wsta: B = $AB : AC$

Log.

Log: AB = 3.0791812.

Log wś: A = 9.8842540.

Suma = 12.9634352.

Log: wś. C = 9.9237205

Różnica = Log BC = 3.0350147.

Azatem bok BC = prawie 1084.

Z pierwszych trzech proporcji znajdziemy bok BC, do którego dobiecie logarytmu wstawy A. i bok AB, a odnowyż od ich summy, logarytmu wstawy C: Różnica albowiem dwóch logarytmów obojga, pokazuje logarytm boku BC, który bok w tabelcy obojga logarytmów liczy, znajdziemy przeto logarytmie = 1083, 96, to jest prawie = 1084.

Podobnym sposobem znajdziemy z drugiej proporcji, i drugi bok AC = 1345, 76.

Dla skrócenia rachunku, można z początku zaraz odjąć logarytm wstawy kąta C, od logarytmu boku wyrażającego bok AB, dodawży do reszty tego drugiego

W 2 loga-

Logarytmu liczby: 10 (co na pamięci mieć potrzeba). Powiększenie zaś, dodając o-
sobno logarytmy wstaw kątown A i B, do
logarytmu liczby wyrażającego bok AB,
dodaliśmy dwóch boków innych.

Można także wygodnie użyć w ra-
chunku b. Trygonometrycznym dodawa-
nia, zamiast odrymowania, kładąc dopeł-
nienia logarytmów. (g) na miejsce tych,
które przez nich są dopełnione.

Y tak w pierwszym, przykładzie, ponie-
wż wstaw kąta C, jest pierwszym wy-
razem proporcji, z którego szukamy bo-
ków AC, albo BC: podstawi zaś AB jest
jednym z wyrazów sr dnic, a drugim
wstaw kąta A, lub B: jeżeli tedy do lo-
garytmu podstawy AB, dodamy dopeł-
nienie logarytmu wstaw kąta C, ta sum-
ma dodana jeszcze do logarytmu wstaw
kąta A, lub B, będzie logarytmem boku
BC, albo AC, odjąwszy tylko logarytm
promienia.

Przy-

(g) Dopełnieniem logarytmu nazywa się ta
liczba, która z nim razem czyni loga-
rytm promienia, tak na przykład, 0,
0715795 z logarytmem wstaw C,
 $99284203 = 10,00000000$.

Przykł. Dopelnienie logarytmu wsta-
wy - C = 9.8713795.
Log: AB = 3.8791812.
Log: wst: A = 9.884-340.

Summa zmiey-
szona liczbą 10. - - = 3.0350147 =
Log. BC.

Więcey iefzeze podobnych przykładów
uczniom podać należy.

340 Przykł. 2. Mała dnie kato. i bok
jednej Trojkąta, znaleźć powiększenie ie-
go przez jedną proporcya.

Niech będzie ten sam go wydzay Troj-
kat, ster go wiałome nam boki. I pro-
fura AB: Małayny powiększe i go
Trojkąta, iposciwizy proporcya CD.

$$\text{Wst: C : Wst. A} = \text{AB : BC.}$$

$$\text{Promień: Wst. B} = \text{BC : CD.}$$

$$\text{Więc Pr} \propto \text{Wst. C : wst: A} \propto \text{wst. B}$$

$$= \text{AB : CD.}$$

$$= \text{AB}^2 : \text{AB} \propto \text{CD}$$

$$= \text{AB}^2 : \text{CD} \propto \text{wst: A}$$

$$\text{A zatem, 2 Pr.} \propto \text{wst. C : wst. A} \propto$$

$$\text{wst. B} = \text{AB}^2 : \text{CD} \propto \text{wst: A}$$

Log.

Log. AB = 3.079112.

Logarytm ten dwa razy wzięty =

Log. A² = 6.158224.

Log. Wst. A = - 9.4844540.

Log. Wst B = - 9.9782003.

Summa = 26.0208227.

Log. 2 = 0.3010300.

Log. Wst. C = 9.9284205.

Log. Pr. = 10.0000000.

Summa 20.2294305.

Różnica tych dwóch summ: 5.7913722, jest logarytmem liczby, która oznaczy powiększenie a ta będzie = 618546. blisko.

Proporcya ta, z której doszliśmy powiększenia Troykąt, tak się wyraża: Proste kąt z Wstawy ciekły, czyli z promienia, i z wstawy kąta przeciwnego jednemu bokowi, tak się ma do prostokąta wstaw dwóch kątów przy tym boku; tak się ma tenże sam bok, do prostokątnej różnicy kątów od wierzchołka kąta przeciwnego; a bo też: prostokąt z promienia, i z wstawy kąta przy wierzchołku, tak się ma do prostokąta z wstaw dwóch kątów przy podstawie, iak się ma podstawa do wysokości Troykąt.

331. Prz.
bac, dwa
1. i 2. zawar
go Troykąt

Niechby y
y kąt: AB

Spuścimy
C; będzie
Wst. A

A zarym P
Wst. A

To jest: r
jednego z
prostokąta z
do powierzo

Niech bę

Log. z AB
Log. AC
Log. Wst. 5

Summa z
logarytm
z tym sam
= 39767.

335. Przył. 2. Mając dane w Trójkącie dwa boki Trójkąta, i kąt między nimi zawarty, znaleźć powierzchnią tego Trójkąta przez jedną proporcję.

Niechby w Trójkącie ABC, znane były boki: AB, AC, i kąt A.

Spuścimy na podstawę AB, prostopadłą CD; będzie Pr:

$$\begin{aligned} \text{Wł. } A &= AC : CD. \\ &= AC \times AB : CD \times AB. \\ &= AC \times AB : 2 \text{ powierzchni} \end{aligned}$$

A zatem Pr.

$$\text{Wł. } A = \frac{AC \times AB}{2} \text{ powierzchni.}$$

2.

To jest: tak się ma promień do wstawy jednego z kątów Trójkąta, jak polewa prostokąta z dwóch ramion kąta danego, do powierzchni Trójkąta.

$$\text{Niech będzie } AB = 384.$$

$$AC = 425.$$

$$A = 50^\circ.$$

$$\text{Log. } \frac{1}{2} AB = \text{Log. } 192 = 2.2833012.$$

$$\text{Log. } AC = - - - 2.6274550.$$

$$\text{Log. Wł. } 50^\circ = - - - 9.887240.$$

Summa zmniejszona Pierwszą 10. (niektórzy logarytmom 10) = 4.7750102, a zatem powierzchnia której szukamy = 59767.

Fig. 4. 332. *Pizylos. 4.* Małgo dany Troy-
kąt prostokątny, którego wiadoma jest
przeciwprostokątna i jedno ramię kąta
prostego, znaleźć inne dwa kąty, i bok
trzeci.

Wziąwszy wtym Troykacie przeciw-
prostokątną za promień, na i na kącie pra-
wego, będą oraz wstawami kątyw im
przeciwnych; a przemiędyby dana prze-
ciwna była, wstaw na, przez
10000, i za pomocą promienia tegoż czwór-
ci równych, podzielić; kreszcie w tabli-
cach siłgi w wstawu, nie odstawami,
znaleźć b. śl. kresu wyprzedzając bok tra-
gi dany; a jeżeli b. p. był w odstawie,
znaleźć w wstawie, podzielićby wiadome
wstawiać, kąta przeciwnego bokowi
danemu

Gdyby zaś przeciwprostokątna, przez
inną liczbę była wyrażona, a nie przez
tę, która się równała wstawie całego
w tablicach znajdującą się w takim ra-
zie użyćby trzeba na poprzedzającą propor-
cyę:

$$BC: AC == Pr. wst. B.$$

$$\text{Niech będzie } BC == 1548.$$

$$AC == 1248.$$

Log.

Przydawczy

Różn.
Log. Wst.

$$B = 5$$

$$C = 3$$

Pr. wst. C

Log.

Log.

Odkrył
dane, że
* = Log.

Jeśli p.
niech p.
niech p.
niech p.
niech p.
niech p.
niech p.

$$\text{Log. AC} = 3.0962146.$$

$$\text{Przydawaj: log. Fr.} = 13.0962146.$$

$$\text{Log. BC} = 3.1897710.$$

$$\text{Różnica} = 9.9064436. =$$

$$\text{Log. Wt: B.}$$

$$B = 53^\circ 44' - , \text{ to jest } 53 \text{ stopniów,}$$

$$\text{ i } 44 \text{ minut,}$$

$$C = 36^\circ 16' , \text{ to jest } 36 \text{ stopniów,}$$

$$\text{ i } 16 \text{ minut,}$$

$$\text{Pr: wt: C} = \text{BC: AB.}$$

$$\text{Log. EC} = 3.1897710.$$

$$\text{Log. wt. C} = 9.7719872 \times$$

Odcinaj Log. promienia będzie tych
dwóch Logarytmów Suma = 12.9617582
 $\times = \text{Log. AB}$; a zatem $\text{AB} = 915.7 \times$

Jeśli tylko danego boku AB, znaleź-
nieś Logarytm, na drzewie Logarytmów
i od niego odciń Logarytmów sumy
i resztę przesuń przed kres, i boku da-
nego, od drzewa sumy przez 2; będzie
to drzewo Logarytmów, że wiadomo, że kwad-
rat boku AB, równa się różnicy kwad-
ratów

dratów przeciw prostokątnej BC, i boku drugiego AC, albo (co na jedno wychodzi) prostokątowi z summy ich i z różnicy, to jest prostokątowi z summy $BC + AC$ i z różnicy: $BC - AC$. Summa tedy logarytmów summy: $BC + AC$, i różnicy $BC - AC$ będzie logarytmem kwadratu, AB^2 , a zatem połowa tej summy logarytmów, będzie logarytmem Pierwiastku, to jest boku AB.

$$BC + AC = 2796.$$

$$BC - AC = 300.$$

$$\text{Log. } (BC + AC) = 3,4465372.$$

$$\text{Log. } (BC - AC) = 2,4771213.$$

$$\text{Summa} = - 5,9236585.$$

$$\text{Połowa} = - 2,9618292 = \text{Log. AB.}$$

$$\text{A zatem bok AB} = 915,8 \frac{1}{2}.$$

Porównywaiąc z sobą tę ważność dwoiaką boku AB, która z dwóch odmien-
nych rachunków wypada, postrzegamy
różnicę mnieyszą niż $\frac{1}{1000}$ całej ważno-
ści; która to różnica, ztąd pochodzi, że
w pierwszym rachunku braliśmy kąty

B i C

B i C w 60
wzyciu ci

333. Pa
kade i z
bok i mu
ramion i g
inne kąty

Niech
dany jest
mu przez
leść kąt

Spół
cyi: i C
dzieleny
mę kątów

Z dany
EC: AC. w

Spół
na bok prze

W Troj
regu i k
zna co s
dwoma n

P. w
P. L

B i C w samych stopniach i minutach pierwszych nie szukając miar drugich.

333. *Przykł. 5.* Małże dany w Trojkacie rozwiązanym, tzn. rozwiązany, bok temu przeciwny, i jedno z dwóch ramion jego, znaleźć drugie ramie i dwa inne kąty?

Niech będzie Trojkat ACR, którego dany jest bok rozwiązany CR, bok temu przeciwny, i ramie jego AC; znaleźć inne kąty: B, i C; i bok AB. Fig. 5.

Sposób 1. rozwiązan. Z tej proporcji: $bC : AC = \sin A : \sin B$; dojdziemy kąt B, a odstawy od niego, sumę kątów A i B, reszta pokaże kąt C.

Z drugiej proporcji: $\sin A : \sin C = BC : AB$, wiadomy będzie bok AB.

Sposób 2. Spuścimy prostopadłą CD, na bok przedłużony BA.

W Trojkacie prostokątnym ACD, którego bok AC i kąt A jest wiadomy, można dobrać boków CD i AD, z dwóch następujących proporcji.

Po. $\sin A = AC : CD.$

Po. $\cos A = AC : AD.$

Mając wiadomą w Trójkacie prostokątnym BCD, przeciwprostokątną BC, i jedno kąta z tego kąta CD, będzie można dojść (332) B ku BD, od krótszego odcinawszy AD, znajdziemy bok AB.

Przykłady wyżej podane już dożyć objaśnić były powinny, iak daley sobie w tym działaniu postępować.

Fig. 6. Podobnego sposobu użyć należy gdy kąt osiowy jest dany, i bokiemu przeciwny większy od drugiego boku danego. Ta tylko jest różnica, że w drugim sposobie postępowania linia AP, będzie sumą a nie różnicą linii BD, AD.

Fig. 7. Gdy zaś bok CB, przeciwny kątowi danemu A, większy jest od boku danego AC, który spływa na ramie tegoż kąta; w takim razie wstawia kąta B, wyznaczoną z tego oświ: $B: A:: \sin w: A \sin B$ może być równie wstawia dwóch kątów B, E, jednego osiowego, a drugiego rozwartego, i takten przybliżonego do 180°. Według drugiego sposobu postępowania, linia AB, AD może być sumą, albo różnicą linii AD, BD albo BD po dale cwa odmiennie Trójkąty: ACB', ACB: które lubo mają w sobie dwa boki dane i kąt osiowy także dany, różnią się jednak trzecim

sim bok
Zgadza
Geometri

304. 11
je. 10 w
znaczyć w
promienia
m ga być

Różn
fortnym
iś wstaw
wch kara
mien kola

I. 10 b 4
W. 10 b 4

3	-
4	-
5	-
6	-
7	-
8	-
9	-
10	-
11	-
12	-
13	-
14	-
15	-
16	-
20	-
24	-
15 d.	-

cim bokiem, i dwoma innymi kątami. Zgadza się to z tym, co się już w Geometrii o kół w Rozd. II.

324. *Próbujmy* 6. Mając daną liczbę boków w wielokątach foremnych, wyznaczyć wartość każdego boku względem promienia koła, w które też wielokątymy być może.

Uwaga. Połowa boku każdego w foremnym wielokącie, w koło wpisany, jest połową połowy kąta w środku tegoż wielokąta, wziętą za promień, promień koła na tym wielokącie opisanego.

Wzrost boków Polowy kątów. Wzrost Polowy Wielokątów. w środku kątów w środku

3	-	60°	-	86602.
4	-	45°	-	70711
5	-	36°	-	58779
6	-	30°	-	50000
7	-	25°	-	43308
8	-	22½°	-	38671
9	-	20°	-	34202
10	-	18°	-	30902
11	-	16⅔°	-	28171
12	-	15°	-	25882
15	-	12°	-	20791
16	-	11⅓°	-	19509
20	-	9°	-	15043
24	-	7½°	-	13053
i t. d.		i t. d.		i t. d.

Te wstawy dwa razy wzięte są bokami wielokątów wpisanych w koło, którego promień --- rcccc.

Niechby był Trójkąt prostokątny, którego wiodłone są dwiema ramionami prostego; trzecia zaś będzie przeciwprostokątną, i dwa inne kąty.

Jaż się wyżej pokazało, że mając dane dwa boki w Trójkącie prostokątnym, znajdzie się przeciwprostokątna, do której do siebie dwa kwadraty tychże boków, i z summy wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy. Alę gdy liczby oznaczające wielkości boków danych są bardzo wielkie; nie ma do czasu potrzeby na podniesienie tych liczb do kwadratu; a że i summa tych kwadratów będzie bardzo wielka, iż z niej pierwiastek kwadratowego wyciągnąć przez logarytm nie można, a wyciągnąć go z wyrażonym sposobem długawy pracą była; przeto dla więkzey wygody, w tej i wielu innych okolicznościach, wymienowano w tablicach logarytmów, i inne jeszcze, oprócz wstaw, takie.

335. *Defin.* Niech będzie łuk koła jakiego, a od jednego końca, tego łuku niech będzie poprowadzona stycznica, tak dale-

daleko, aż
długość
kątów tego
małpina mi
ła, i promi
się Sycy
gonometrie
łku. Lin
łuk koła
nich przed
zywa do S
T. i p
gonometrie

York Pa
na, a d
pierwiastek lin
kwa ACC. b
Ponieważ i
90°. Iako A
my styczn
promienn
PP będzie
nieraz łuku
właż raz
droga zaś D

Jak wzgl
stycznych i
nich, jedne
ile drugie,

daleko, aż się spotka z promieniem przedłużonym, i przechodzącym przez drugi koniec tego łuku. Ta część styczniowy zataczająca między punktem dotknięcia koła, i promieniem przedłużonym nazywa się *Styczna Trigonometryczna* albo tylko *Styczna* tego łuku. Linia zaś zawarta między środkiem koła, i między punktem, gdzie promień przedłużony przecina stycznią, nazywa się *Secans Trigonometryczny* (*Secans Trigonometricus*) albo tylko *Secans* tego łuku.

Ytak linie AT, CT są, pierwsza stycz. *Tch.* na, a druga secznej łuku AB. Jest także *XI/III.* pierwsza linia styczna, a druga seczna *Fig. 1.* kąt ACR, biorąc za promień linią CA. Ponieważ łuk FB, jest dopełnieniem do 90° , łuku AB; jeżeli tedy poprowadzimy stycznią FP, aż do ich spotkania się z promieniem CA przedłużonym; linia FP, będzie styczna, a CP seczną dopełnienia łuku AB, a inaczej jeszcze pierwsza nazywana *Dofyczna* (*cotangens*) druga zaś *Dofieczna* (*Confecans*) łuku AB.

Jak względem wstaw, tak względem stycznych i secznych, uważano w tablicach, ledne łuki tyle przewyższające 45° , ile drugie, nie dochodzą 45° ; uważano
zatym

zatem i co do stycznych, i co do stycznych dopełnienia iednych łuków względem drugich.

336. *Npoczyład; Troykąt DCB, ACT* są podobne; więc.

1. $DC:DB = AC:AT$, to jest dostawa takieg ma do wstawy, jak promień do styczney.

2. $DC:CB = AC:CT$, czyli dostawa dopromienia, jak promień do styczney.

Tak też, dla podobieństwa Troykątów: BCG, PCF będzie.

1. Wstaw do dostawy jak promień do styczney.

2. Wstaw do promienia, jak promień do styczney.

Mając styczne, łatwo można wyrachować styczne. Odpowiedź podobne są Troykąt ACT, PCF, będzie. $AT:AC = CF:CP$; to jest promień będzie średnim Geometrycznym między styczną i dostyczną. Logarytm radi promienia dwa razy większy, równa się sumie logarytmów styczney i dostycznej.

337. Styczne do stycznych
aż do stycznych
mieniowi, (C)
b. cz. równ
równą aż do
od promienia
się z nim ni
jest, od wst
znacze mo

Sieczne
równą spo

338. Nie
prócz tego
wierzy w cz
się CAB.

Wziąwszy
ia CA, linia
CB, styczną

Gdybyśmy
promień wy
100000; liczb
leżbyśmy li
czyli styczną
C; i znowu l
powiadająca
żność linii C

337. Styczne rosną, zaczawszy od o , aż do stycznej 45° , która się równa promieniowi, (bo w tym razie trójkąt ACF będzie równoramienny) i dalej jeszcze rosną aż do 90° , których styczna będzie od promienia CF równoodległą. nie może się z nim nie zeydzic, a zatem większą jest, od wszelkiej długości którąby wyznaczyć można.

Sieczne podobnym także iak i styczne rosną sposobem.

338. Niechły był Trojkąt iak Holwiek *Tab. prostokątny*, naprzykład CAB , którego X/X . wiemy w kresbach dwa ramiona kąta prostego CAB .

Wziawszy za promień, naprzykład linię CA , linia AB będzie stycznią, a linia CB , sieczną kąta C .

Gdybyśmy tedy mieli linię CA , to jest: promień wyrażony w tablicach przez 100000; liczba stopniów, przy której znalazlibyśmy liczbę wyrażającą linię AB , czyli stycznią, pokazalaby wartość kąta C ; i znowu liczba między siecznemi odpowiadająca kątowi C , oznaczylaby wartość linii CB .

X

Cdyby

Gdyby zaś linia AC, nie była w tych liczbach wyrażona, w których wyrażona jest wstawia cała, czyli promień tablic, w takim razie trzeba zrobić dwie proporcye, pierwszą $AC: AB = Pr. \text{ styczney } C.$ z której dojdziemy ważności kąta C; drugą $Pr. \text{ Siecz } C = AC: CB.$

Przykł. Niech będzie $AC = 8464,$
 $AB = 5678.$

Logarytm AB z przydanym Log: pro-
 - mienia jest - 13.7541954.
 Log. AC - - 3.9275757.

Różnica, czyli Log. styczney
 - - - C = 9.8266197.
 a z tym kąt C = 33°, 51.

Log. AC = 3.9275757.
 Log. siecz C (odcią-
 wszy Log. Pr.) = - 0.0806610.

Summa — 4.0082367. =

Log: CB; więc CB = 10191. †

339. *Uwaga* Gdyby przyszło wycią-
 gnąć pierwiastek kwadratowy z summy
 kwadratów AC † AB², znaleźlibyśmy
 wa-

ważność przeciw proſikatney BC, więkſzą niż 10192, a mnieyſzą niż 10193. a zatem nie zgadzaiącą ſię z ważnością wyżej znalezionej, 10191 $\frac{1}{2}$; co ztąd pochodzi, że wyznaczając ważność kąta C, opuſciły ſię minuty drugie, i przeſtało ſię na ſamych ſtopniach, i minutach pierwszych; i to opuſzczenie ſprawilo, że ważność BC, mnieyſza iednością prawie wypadła; ale uchybienie takowe ieſt bar- dzo małe, gdyż od prawdziwey ważno- ſci różni ſię tylko małe co więcey, iak $\frac{1}{10000}$.

Poprawa tey omyłki taka być może.

Ponieważ różnica między logarytmem ſłycznej C, znalezionym, i logarytmem tablic naybliższym, ieſt 874; a różnica dwóch logarytmów Tablic mnieyſzego i więkſzego od logarytmu znalezione- go, ieſt: 2730, więc będzie, $2730:874 = 60'':19''$, a zatem kąt C $= 33^{\circ} 51' 19''$

Log. - AC $= 3.9275757$.

Log: ſiecz: C.

(odejawn(z)Log.Pr.) $= 0.0806880$.

Sum: czyli Log.BC $= 4.0082637$.

więc BC $= 1.0192\frac{1}{2} = 10192,1$.

X 2 340.

340. *Przystosowanie.* W Troykacie, w którym wiadome są dwa boki, i kąt zawarty między niemi, znaleźć bok trzeci, i dwa inne kąty?

Fig. 2. Niech będzie Troykat ACB, w którym dane są dwa boki AC, BC, i kąt C, trzeba ztąd doysć boku AB, i dwóch innych kątów.

Rozwiąz. Spuściwszy prostopadłą BD, na bok AC; w Troykacie prostokątnym BCD wiemy przeciwprostokątną BC, i kąt dany C, ■ zatem doydziemy dwóch boków BD, DC; a że wiadoma także jest podstawa AC, więc odiawszy CD od AC znajdziemy AD; i znowu w Troykacie prostokątnym ADB z wiadomych dwóch ramion kąta prostego, doysć będzie można (335) innych dwóch kątów, i przeciwprostokątney AB.

Ten sposób w tym jest nie wygodny, że trzeba cztery uczynić proporcycy, aby doysć boku AB. Jako zaś, to, co z każdej z pierwszych trzech proporcyci wypada wchodzi w czwartą proporcycą, tak i omyłki tam popelniane, tu wpływaią.

Ażeby więc w tym co z ostatniey proporcyci wypadnie, uniknąć uchybienia, należy

ży iak naved
w trzech pier
dać potrzeba
szukać się mu
iako też i wy
maż zapyta

341. Gdy
tylko linii A
żyć następui

$AB^2 = AC$

A że jest BC

więc $2AC \times B$

a zatem $2AC$

A ztąd $AB^2 =$
ICD.

Ze zaś tey
zawże rozło
ści, więc pr
tego wykona

W takow
się pośpolicie

ży jak najdokładniejszy rachunek czynić
w trzech pierwszych. Y to jeszcze przy-
dać potrzeba, że w tym sposobie działania
szukać się musi dwóch odcinków AD i DC,
iako też i wysokości BD, lubo o nie nie
miał zapytania.

341 Gdyby przyszło dochodzić samey
tylko linii AB, w tym razie możnaby u-
żyć następującego sposobu.

$$AB^2 = AC^2 \times BC^2 - 2 AC \times CD.$$

Aże jest $BC : CD = Pr$: Dostawy BCD

więc $2 AC \times BC : 2 AC \times CD = Pr$: dost: BCD.

$$\text{a zatem } 2 AC \times CD = 2 AC \times BC \times \text{dost: BCD.}$$

$$\text{A ztąd } AB^2 = AC^2 \times BC^2 - 2 AC \times BC \times \text{Dost:}$$

1 CD.

Pr:

Ze zaś tey ostatniej ilości nie można
zawżę rozłożyć na inne mnożące ją ilo-
ści, więc przez same logarytmy działania
tego wykonać w tym razie nie możemy;

W takowym tedy przypadku, używa
się pospolicie następującej proporecy.

342. *Twierdź: 2.* Summa dwóch boków Troykąta, tak się ma do różnicy tychże boków, iak styczną połowy summy dwóch kątów przeciwnych tym bokom, do styczney połowy różnicy tychże kątów.

Trzeba tu nayprzod wyłożyć uczniom, co się rozumi przez wyrazy tey proporcyi; a w szczególności pokazać im, że stosunek między stycznymi połowy dwóch kątów, albo dwóch łuków nie jest ten sam, co między stycznymi całych tych kątów albo łuków. Widocznie się to okazuje w tablicach Trygonometrycznych.

Fig. 3. Niech będzie Troykąt ABC, w którym bok AB, mniejszy jest od boku AC; w tym Troykącie będzie AC : $\frac{AB}{2}$: AC — AB
= styczn: $\frac{B + C}{2}$: styczn: $\frac{B - C}{2}$.

Dowód: Wziąwszy AD = AB, i połącznawszy BD, Troykąt równoramienny ABD, i Troykąt nie równoramienny ABC, mają kąt spólny A. Więc summa kątów ABD, ADB, równa się summie kątów ABC, ACB; azatym ieden z kątów Troykąta równoramiennego, nap: kąt ABD, równa się połowie summy dwóch ką-

kątów ABC, ABC, większą składa się z różnicy tych kątów ABD, i jest podobne CBD będzie

Linia DC AC, AB; p części w p łową różni Aże bok w summy wr dwóch bok ich summy, a zatym li siebie, iak p AB, do poł więc całe dz kazać, iż st się mają do

Z Punktu dla AF, pr nieważ Tro nym, linie też są równ gnawszy li kary: BDC odległe; a są podobne

kątów ABC, ACB Troykąta ABC. Kąt ABC, większy zdwóch kątów ABC, ACB. składa się z połowy summy, i z połowy różnicy tychże dwóch kątów; aże kąt ABD, jest połową ich summy, więc kąt CBD będzie połową ich różnicy.

Linia DC jest różnicą dwóch boków AC, AB; przeciąwszy ją na dwie równe części w punkcie E, linia CE będzie połową różnicy dwóch boków AC, AB. Aże bok większy AC, równa się połowie summy wraz z połową różnicy tychże dwóch boków, więc AE będzie połową ich summy, gdy CE jest połową różnicy; a zatym linie AE, CE, tak się mają do siebie, iak połowa summy boków AC, AB, do połowy ich różnicy. Na tym więc całe działanie rozechodzi się, aby pokazać, iż tyczne kątów ABD, CBD, tak się mają do siebie, iak linie AE, CE.

Z Punktu A, spuśćmy na BD, prostopadłą AF, przedłużwszy ją aż do G. Ponieważ Troykat BAD jest równoramiennym, linie BF, FD będą równe; a że też są równe linie DE, CE, więc połączawszy linią FE, podobne będą Troykаты: BDC, FDE, i linie FE, BC równoodległe; a zatym i Troykаты AFE, AGC są podobne; Będzie więc $AE : CE = AF.$

AF: FG. Ze zaś wzięwszy za promień linię BF, łukie FA, FG, będą stycznymi kątów: FBA, FBG, albo ABD, CBD; więc AE: CE = styczn: ABD: styczn: CBD; albo, $AC \div AB: AC - AB =$ styczn:

$B \div C: styczn: B - C$ albo ^{2.} ^{2.} $nakoniec,$

$AC \div AB: AC - AB = styczn: B \div C:$

styczn: $B - C$.

^{2.}

343. *Przekładowanie 1.* Gdy dwa boki AC, AB, są wiadome, będzie wiadoma ich suma $AC + AB$, i ich różnica $AC - AB$; gdy także wiemy kąt A, wiedzieć tym samym będziemy sumę i połowę summy dwóch innych kątów B i C, a zatem i styczną połowy tej summy; więc i czwartego wyrazu proporeyi poprzedzającej, to jest styczney połowy różnicy tych dwóch kątów dojdziemy, a ztąd wiadoma nam będzie i połowa różnicy tych dwóch kątów. Wiedząc zaś połowę ich summy, i połowę różnicy; gdy połowę summy do połowy różnicy dodamy, znajdziemy kąt większy B, a odjąwszy połowę różnicy od połowy summy, okaże się kąt mniejszy C. Znajdziemy nakoniec i bok trzeci BC.

Przykł.
- AC
AB
A

4296: 608
styczn: 68°

Log. styczn

Log.

Sum

Log.

R

Więc B

Aże B

Przykt: Niech będzie

$$\begin{array}{rcl} - AC = 2452. & AC \div AB = 4206. \\ AB = 1844. & AC - AB = 608. \\ A = 44^\circ & B \div C = 136^\circ. \\ & B \div C = 68^\circ. \end{array}$$

2

$$4296: 608$$

$$\text{fycz: } 68^\circ \text{ fycz.}$$

$$B - C$$

2.

$$\text{Log. fycz: } 68^\circ = 10.3935904,$$

$$\text{Log. } 608 = 2.7839036.$$

$$\text{Summa} = 13.1774940.$$

$$\text{Log. } 4296 = 3.6330643.$$

$$\text{Różnica} = 9.5444297.$$

$$\text{Log. fycz: } 19.18^\circ$$

$$\text{Więc } B - C = 19^\circ. 18'.$$

$$\text{Aże } B \div C = 68^\circ \text{ więc}$$

$$B = 87^\circ. 18'.$$

$$C = 48^\circ. 42'.$$

Wft: C: wft. A = AB: BC

Log. AB = 3,2657609.

Log. wft: A = 9,8417713.

Summa = 13,1075322.

Log. wft. C = 9,8757927 —

Refzta, to iest Log: BC = 3,2317395 $\frac{1}{2}$
BC = 1705 $\frac{1}{2}$

Aby się przeświadczyć o dokładności
tego działania szukamy BC, i przez drugą
proporcją; wft: B: wft: A = AC: BC.

Log. AC = 3,3895205.

Log. wft: A = 9,8417713.

Summa = 13,2312918.

Log. wft. B = 9,9995176 $\frac{1}{2}$

Refzta = 3,2317742 —

więc BC = 1705,2 —

344. *Przystosowanie 2.* Wyznaczyć
przez rachunek odległość dwóch mieysc
nie dostępnych.

Widzieliśmy (w Rozd: XI.) że do te-
go trzeba było wymierzyć podstawę i
wy-

wyznaczo-
stawy czy-
ku dwom
szukamy.
żądanej c

Niech
na, i wyz-
i BA.

Pniewa
dwa kąty
ich summa
bo od 180
xB.

Podobny
A i B.

W Tró-
podstawę
doyść dw-
gulości l

Podobr-
mego bok-
zna wyzu-
gulości

W Tró-
dwa bok

wyznaczyć kąty, które przy końcach podstawy czynią dwie linie wykierowane ku dwóm punktom, których odległości szukamy. Można dojść i przez rachunek żądanej odległości.

Niech będzie AB podstawa wymierzo- Fig 4
na, i wyznaczone kąty: $\angle xAB$ i $\angle AB.xBA$,
i $\angle BA$.

Pnieważ w $\triangle ABC$ $\angle xAB$, wiemy
dwa kąty przy podstawie, odławiży więc
ich sumę od dwóch kątów prostych, al-
bo od 180° , reszta pokaże kąt trzeci \angle
 xB .

Podobnym sposobem dojdziemy i kąta
 $\angle A$ i $\angle B$.

W $\triangle ABC$ $\angle xB$, mając wiadomą
podstawę AB , i wszystkie kąty, można
dojść dwóch innych boków, a w szczególności linii AC .

Podobnie i w $\triangle ABC$ $\angle A$ z wiado-
mego boku AB , i wszystkich kątów, mo-
żna wyznaczyć dwa inne boki; a w szczególności linią BC .

W $\triangle ABC$ na koniec $\angle xAy$ znając
dwa boki AC , BC , i kąt $\angle xAy$ między
nimi

niemi zawarty, (który jest różnicą między kątem wyznaczonym xAB, yAB ;) można doysć linii xy , to jest żadaney odległości.

Uwaga. Ponieważ wyznaczenie linii xy , zawiśło od linii Ax, Ay ; dokładność też w wyznaczeniu linii xy , zawiśła od tej dokładności, z którą dwie tamte linie były wyznaczone.

Przykład. Niech będzie

$$\begin{array}{ll} xAB = 77^\circ & \text{więc } Ax B = 49^\circ \\ yAB = 42^\circ & Ay B = 36^\circ \\ yBA = 102^\circ & xA y = 35^\circ \\ xBA = 54^\circ & \\ AB = 1200. & \end{array}$$

$$\text{Wft: } Ax B : \text{wft: } xBA = AB : Ax.$$

$$\begin{array}{ll} \text{Log. } AB = 3,0791812. \\ \text{Log. wft. } xBA = 9,9079576. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Summa} = 12,9871388, \\ \text{Log. wft. } Ax B = 9,8777799. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Reszta} = 3,1093589, = \text{Lo: } Ax \\ Ax & 1286,35. \end{array}$$

Wft:

Wft: A y B: wft. AB y = AB: Ay.

$$\begin{array}{l} \text{Log. AB} = 3,0791812. \\ \text{Log. wft. AB y} = 9,9904044. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Summa} = 13,1695856. \\ \text{Log. wft. A y B} = 9,7092187. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Reszta} = 3,4603669. = \\ \text{Log. Ay.} \end{array}$$

Ay = 2514. bardzo blisko

$$\begin{array}{l} \text{Znalazłszy bok Ax} = 1286,35. \\ \text{Ay} = 2514. \end{array}$$

Kąt między temi bokami zawarty: x
Ay = 35°.

$$\begin{array}{l} \text{Będzie Ax} \times \text{Ay} = 3800,35 \\ \text{Ay} - \text{Ax} = 1227,05. \\ \text{Axy} \times \text{Ayx} = 145^\circ \\ \text{Axy} \times \text{Ayx} = 72^\circ \frac{1}{2}. \end{array}$$

2

Więc (podług Twierdz 2.): 3800,35:
1227,05 = fycz: 72°½: fyczna - -
Axy - Ayx.

2.

Log.

Log. flycz: $72^{\circ}\frac{1}{2} = 10,5012777.$

Log. 1227,35 $= 3,0890735.$

Summa $= - 13,5903512.$

Log. 3800,35 $= 3,5798237.$

Różnica $= - 10,0105275. =$

Log. flycz: $45^{\circ} 42' -$

więc $\frac{Axy}{2} - Ayx = 45^{\circ}, 42' -$

Aże jest $\frac{Axy}{2} + Ayx = 72^{\circ}, 30'$

Więc $\frac{Axy}{2} = 118^{\circ} 12' -$
 $Ayx = 26^{\circ} 48' +$

Mając wiadome wszystkie kąty, w Trykacie xAy, i oprócz tego dwa boki: AxAy, znajdziemy bok trzeci xy, to jest odległość, której szukamy, przez jedną z tych dwóch proporcji:

Wft: Ayx: wft: xAy $=$ Ax: xy.
 albo wft. Ax: wft. xAy $=$ Ay: xy.

Szuka-

Szukaym
 nap: propor

Będzie L
 Log. wft

Summ
 Log. wft

Róż: to jest
 wft

Zostaie
 przypadek,
 nych w Tr

Sposob z
 na tym, aby
 sławy oddz
 na tę podsta
 ku kąta iey

345. Tw
 Trykątą, t
 boków iego
 do różnicy

Niech be
 z wierzchoł
 ła CD, na p
 cie, AB: B

Szukamy boku xy przez pierwszą nap: proporcją;

$$\text{Będzie Log. Ax} = 3.1093589.$$

$$\text{Log. wft. xAy} = 9.7585913.$$

$$\text{Summa} = 12.8679502.$$

$$\text{Log. wft. Ayx} = 9.6540586$$

$$\text{Róż: to jest Log. xy} = 3.2138916 +$$

$$\text{wice xy} = 1636 +$$

Zostaie jeszcze. do rozwiązania ten przypadek, w którym z trzech boków danych w Troykacie, szukamy kątownego.

Sposob zwyczajnie używany, zawisł na tym, aby szukać dwóch odcinków podstawy oddzielonych przez prostopadłą, na tę podstawę spuszczoną, od wierzchołku kąta iey przeciwnego.

345. *Twierdż: przybrane.* Podstawa Troykata, tak się ma do summy dwóch boków iego, jak różnica tychże boków, do różnicy odcinków podstawy.

Niech będzie Troyką ABC . w którym *Fig. 5.* z wierzchołka C , spuszczone jest prostopadła CD . na podstawę AB ; w tym Troyką, cie, $AB : BC :: AC - BC : AC$; $BD - AD$.

Od punktu C, iak od środka, promieniem CA nakreślmy koło, które przetnie podstawę AB w punkcie G, bok BC, w punkcie F, a tenże przedłużony, w punkcie E.

Będzie zatem

$$BE = BC + AC \text{ (bo } AC = CE \text{)}$$

$$BF = BC - AC \text{ (bo } AC = CF \text{)}$$

$$BG = BD - AD \text{ (bo } AD = DG \text{)}$$

A ponieważ sieczne BA, BE od jednego punktu B wychodzą, więc (231) $BA : BE = BF : BG$; to jest, tak się ma podstawa BA do summy dwóch boków $= BE$; iak się ma różnica tychże boków $= BF$, do różnicy BG odcinków, które czyni prostopadła CD spuszczone z wierzchołka kąta C. na Podstawę.

346. *Przystosowanie.* Ponieważ odcinków BD, AD, wiemy sumę i różnicę, wiedzieć będziemy i każdy z nich z osobna, iako to już się wyżej pokazało; będzie albowiem większy odcinek $BD = AB + BG$, a mniejszy $AD = AB - BG$.

2.

2

Aże, $BC : BD =$ Pr. Dośt. B.

A zaś $AC : AD =$ Pr. Dośt. A.

Więc dojdziemy i kątów B, i A.

Przykl.

Przykl. Ni

Log. BC

log. BC

Sum

Log. A

Różnica

Więc

AB

2

BD - AD

2.

Summa

Różnica

BC : BD

Log. BD z p

Przykł. Niech będzie

$$AB = 1200.$$

$$BC = 935.$$

$$AC = 112.$$

$$BC \times AC = 1547.$$

$$BC - AC = 323.$$

$$\text{Log. } BC \times AC = 3.1894903.$$

$$\text{Log. } BC - AC = 2.5092025.$$

$$\text{Summa} = 5.6986928.$$

$$\text{Log. } AB = 3.0791812.$$

$$\text{Reszta} = 2.6195116.$$

$$\text{Więc } FD - AD = 416.4. \text{ bardzo bli-}$$

fko.

$$AB = 600.$$

$$BD - AD = 208.2$$

2.

$$\text{Summa} = 808.2 = BD.$$

$$\text{Różnica} = 391.8 = AD.$$

$$BC : BD = \text{Pr. Dofu: B.}$$

$$\text{Log. } ED \text{ z przydanym Log. Pr.} =$$

$$12.9075188.$$

$$\text{Log. } BC = 2.9708116.$$

$$\text{Reszta} = 9.9367072 =$$

Y

Log.

Log. Doft: B. więc B = $30^{\circ} 11' 15''$
 AC:AD = Pr. Doft. A.

Log: AD z przydanym Log. Pr. =
 $12.5930644.$
 Log. AC = $2.7867514.$

Reszta = $9.8063130. =$

Log. Doft. A. więc A = $50^{\circ} 12'. 23''$.
 C = $99^{\circ} 36'. 22''$.

Dla zapewnienia się o tym, można szukać jeżeli sto funek wstaw kątów A, i B równa się stosunkowi boków im przeciwnych; będzie zaś w samey rzeczy równa się, gdy w proporcyi, którey trzema wvrazami będą, BC, AC, wst. A za czwarty wyraz wypadnie wstaw kąt B, teyże samey iak wyżej znaleźliśmy ważności.

Log. wst. A = $9.8855618.$
 Log. AC = $2.7767514.$

Summa = $12.6723132.$
 Log. BC = $2.0708116.$

Reszta = $9.7015016. =$

Log. wst. B.

Kąt B, odpowiadający temu logarytmowi, różni się mniej niż $3''$ od wyżej znalezionej.

347. Uwaga
 kowych doś
 chunki zawil

W tym of
 wzięcie za
 Trojka: :
 wteście be
 stawie są of

P R

Przystosow

348. p
 w
 rachowawł
 punktów.
 wzięcia był
 tych dwóch
 znaczenia p
 re z pierw
 wżalnie.
 gle. Trzeba
 tych ostatn
 wżey podsta

Niech A
 x y, dwa p

347. *Uwaga.* Nietrzeba opuszczać takowych doświadczeń, zwłaszcza, gdy rachunki zawisły iedne od drugich.

W tym ostatnim razie, najlepiej jest wziąć za podstawę bok największy Trójkąta; bo tak z zupełną pewnością wśledzić będziemy, iż kąty przy tej podstawie są ostre.

PRZYDATEK I.

Przystosowania Trygonometrii do różnych działań na gruncie.

348. *Przystosowanie 1.* Wyznaczyćwszy na gruncie: a rotym wyrachowawszy położenia i odległości dwóch punktów, względem iedney podstawy, wzięta była za drugą podstawę odległość tych dwóch punktów i użyto iey do wyzracczenia położenia innych Punktów, które z pierwszych stanowisk, albo były nie widzialne, także też od nich bardzo odległe. Trzeba teraz wyrachować położenia tych ostatnich punktów względem pierwszej podstawy.

Niech AB wyraża pierwszą podstawę; *Tab. XX*
 x y, dwa punkta, których położenia i od- *Fig. 1.*
 Y 2 legio-

ległości wyznaczone już są względem tej podstawy, przez wymierzenie kątów przy A i B . Weźmy potem xy za drugą podstawę dla wyznaczenia położenia punktu z , niewiedzielnego z pierwszych stanowiąc: A i B , albo od niej bardzo odległego. Jakże to położenie punktu z wyznaczymy, względem pierwszej podstawy AB ?

Sposób postępowania przez rachunek:

1. W Trykacie $A \times B$ wyznaczymy Ax .

2. W Trykacie $A y B$ wyznaczmy Ay .

3. W Trykacie xAy wiadome mając: Ax , Ay , i kąt xAy , wyznaczmy: xy , i kąt: Axy .

4. W Trykacie xzy , wiadomą mając podstawę, i kąty wszystkie, wyznaczmy xz .

5. W Trykacie Azx wiadome mając: Ax , xz , i kąt Axz wyznaczmy Az .

Podobnie można wyznaczyć Bz .

349. Uwaga. Tym sposobem postępując, można także sprawdzać działania i edne przez drugie czynione z różnych punktów stanowiąc.

350. *Przyślusowanie 2.* Do jakiegokolwiek linii cz. i dany kąt wiadomy z podstawą stołować położenia punktów wyznaczonych już względem tej podstawy.

Niech będzie AC linia czyniąca kąt *Fig. 2.* wiadomy z podstawą AB. i niech α , będzie punktem, którego położenie już jest wyznaczone względem podstawy AB; trzeba ztąd dojść do położenia tego punktu względem linii AC.

Dojdziemy tego, spuściwszy prostopadłą AP na linię AB. i wyznaczymy wielkość tej prostopadłej, iako też tej odległość AP, od punktu A.

Sposób postępowania prz z rachunek.

W Trójkącie $\triangle ABC$ można było wyznaczyć linię AC; kąt $\angle CAB$ jest też wiadomy; więc znajdziemy kąt $\angle CAX$, który jest różnicą kątów $\angle CAB$, $\angle XAB$. W Trójkącie tedy $\triangle ACX$, mając wiadome kąty, i przeciwprostokątną AC, można będzie wyznaczyć linie: AP, i PX.

351. *Przyś: 3.* Wyznaczyć promień koła, mając daną cięciwę odcinka tego, i kąt tegoż odcinka.

Niech

Fig. 3. Niech będzie AB linia dana, na której nakreślić trzeba odcinek koła mogący zawierać w sobie kąt dany; wyznaczmy promień tego koła.

Niech będzie C, środek koła, szukanego; poprowadźmy linią CD do środka linii AB, ta będzie prostopadłą do AB. w Trójkącie ACD, kąt ACD równa się kąto wi odcinka danemu, bo miarą jego, jest połowa łuku AB; kąt CAD, jest jego dopełnieniem. Wziąwszy AD za promień, będzie AC, liczną kąta CAD, a tym można wyznaczyć, promień koła szukanego, z tej proporeyi; Jak się ma promień do dośięcznej kąta danego, tak się ma połowa cięciwy danej do promienia koła, którego szukamy.

352. Uwaga. - Stosunek AD do CD, równy jest stosunkowi wstawy całej, czyli promienia, do styczney kąta CAD.

Aże, jeżeli AB jest bokiem wielokąta foremnego, będzie CD promieniem koła wpisanego w ten wielokąt; więc mając dany bok wielokąta foremnego, i wiedząc liczbę boków jego, można wyznaczyć, promień koła wpisanego i opisanego, przez dwie następujące proporce.

1. Wsta-

1. Wstawy połowy kąta w boku wpisanego.

2. Wstawy połowy boku wielokąta.

353. Prosta trzy boki trójkąta wpisanego widzimy, trzeba wyznaczyć, od trójkąta.

Niech AB będzie promieniem koła wpisanego w wielokąt, pod kątem, pod którym, AB, chowa się linia.

Niech boki wielokąta, mogą zawrzeć pod kątem, Punkt x boku koła.

1. Wstawia cała, tak się ma do styczney połowy kąta w środku koła, iak połowa boku wielokąta do promienia koła wpisanego.

2. Wstawia cała tak się ma do dosieczney połowy kąta w środku, iak połowa boku wielokąta, do promienia koła opisanego.

353. *Przystosowanie 4.* Wyznaczywszy trzy boki Trójkąta na gruncie iakim uważanego, i znając kąty, pod któremi widzimy te trzy boki z jednego punktu, trzeba wyznaczyć odległość tego punktu, od trzech wierzchołków Trójkąta.

Niech ABC wyraża Trójkąt, którego wszystkich boków już dośliśmy, niech x, będzie punktem, z którego uważaliśmy kąty, pod któremi dały nam się widzieć linie, AB, BC, AC; trzeba jeszcze wyrachować linie: Ax, Bx, Cx. Fig. 4

Niech będą D, i E, środki koł, których odcinki nakerśłone na liniach AB, i BC mogą zawierać w sobie kąty równe tym, pod któremi widzieliśmy linie AB i BC. Punkt x będzie w przecięciu tych dwóch koł.

Dwa

Dwa promienie BD, BE, mogą być wyrachowane tak, jak w przystofowaniu 3.

W Troykacie ABC, wktorym wsfzystkie boki są wiadome, można wyrachować kąt ABC. Kąt ASD jest wiadomy, bo jest dopełnieniem kąta wiadomego AxB; więc wiadomy jest także i kąt CBD. Aże wiemy i kąt CBE, który jest dopełnieniem kąta CxB, więc wiadzieć będziemy i kąt DBE; a zatyń w Troykacie DBE, wiemy dwa boki: BD, BE, i kąt DBE, między nimi zawarty; a zatyń można wyznaczyć wysokość Bx, która jest połową łuku łzakauey Bx; albo, (co krócey ieſzcze będzie) można, w tym Troykacie wyrachować kąty D, i E. Ze zaś kąt w środku D, równa się kątowi xAB, wpierającemu się na łuku dwa razy więkſzym; a kąt w środku E, ieſt ſpełnieniem (w tej figurze) kąta xCB; więc kąty; BAx, BCx są wiadome; a zatyń w Troykątach: BAx, BCx, wiemy kąty wsfzystkie, i boki: BA, BC; ztąd będzie można wyznaczyć linie Ax, Bx, Cx, których ſzukamy.

Jeden prawie ieſt ſpoſob poſtępowania na iakiekolwiek położeńie punktu x. W tym tylko bywa odmienny, że czaſem trzeba dodawać, a czaſem odeymować kąty

kąty znaydują
kąty D i E,
a czaſem ſą

354. Rac
ſkroczony
ſzczególny

Przykła
się na prze
Troykacie
ku AB.

W Troy
A, x, i boki
rachować b

Przykła
będą na iedn

Protokas
ne, pierwiz
ſpulfzczony
ła opłanę
protokatów
średnicy k
CxB; więc
ſię mają do
pierwſze ta
Ax, Bx, ad
dwie śred

kąty znaydujące się przy B; i że czaſem kąty D i E, równe ſą kątom przy A i C, a czaſem ſą ich ſpełnieniem.

354. Rachunek ten może być ieſzcze ſkróconym w nie których przypadkach ſzczegulnych.

Przykład 1. Niech punkt x, znaydnie ſię na przedłużeniu iednego z boków Troykąta ABC, napr: na przedłużeniu boku AB. Tab. XVI. Fig. 1.

W Troykącie CAX, wiadome ſą katy A, x, i bok CA; więc będzie można wytaehować boki: Ax, Cx.

Przykład 2. Niech trzy punkta: A.B.C, będą na iedney linii. Fig. 2.

Proſtokaty $Ax \times Cx$, i $Bx \times Cx$ ſą równe, pierwſzy proſtokątowi z proſtopadley ſpuſzczoney od x, na AB, i z ſrednicy koła opiſanego na Troykącie AxC; drugi, proſtokątowi z teyſze proſtopadley, i z ſrednicy koła opiſanego na Troykącie CxB; więc pierwſze dwa proſtokąty tak ſię mają do ſiebie, iak i dwa drugie. Aże pierwſze tak ſię mają do ſiebie, iak linie; Ax, Bx, a drugie tak ſię mają do ſiebie, iak dwie ſrednice; więc ſtoſunek Ax do Bx ieſt

jest wiadomy, bo jest równy stosunkowi średnicy koła opisanego na Troykącie ACx, do średnicy koła opisanego na Troykącie BCx albo równy stosunkowi promieni tych dwóch kół. Szukając tedy podstawy w Troykącie, któryby miał kąt w wierzchołku równy kątowi AxB, a zatym wiadomy, i dwa ramiona równe dwom wyżey wspomnianym promieniom; gdybyśmy tę podstawę znaleźli równą linii AB; linie też Ax, Bx, byłyby równe tym promieniom. Gdyby zaś ta znaleziona podstawa nie była równa linii AB, tedy z dwóch następujących proporcji, dojdziemy boków: Ax, Bx.

1. Jak się ma podstawa znaleziona, do podstawy AB, tak się ma promień pierwszy do Ax.

2. Jak się ma podstawa znaleziona, do podstawy AB, tak się ma promień drugi do Bx.

Tym sposobem możemy też doświadczać, czyli działania nasze czynione na ziemi; były dokładne.

355. *Przystos.* Niech będzie dana linia prosta na gruncie; wyznaczyć, bez mierzenia odległości i położenia względem tej linii, dwóch punktów, z których widzimy obadwa jej końce.

Niechby

Niechby
niech będą
każdego
tej linii;
żenia tych
względem
B, nie mie
odległości

Zpunk
ACB, DO
ACD, BD

Dawcz
CD, moż
ści lin:

Gdybyś
ostatniej
wzdiwey
byłoby to
prawdziw
innych li

Gdyby
AB, nie b
mey; ted
proporcy
na linii A
wey, tak
CD, dow

Niechby wiadoma była nap: linia AB. *Fig. 3.*
niech będą dwa punkta: C, i D, z których
każdego widać można końce A, i B,
tey linii; wyznaczyć odległości, i poło-
żenia tych dwóch punktów, C, i D, tak
względem siebie, iak i względem linii A
B, nie mierząc pierwey żadney z tych
odległości.

Z punktów C, i D, wyznaczmy kąty:
ACB, DCB, ADB, ADC, a zatym i kąty:
ACD, BDC.

Dawszy iakąkolwiek ważność linii
CD, możnaby z niey dochodzić ważno-
ści linii: CA, CB, DA, DB, i AB.

Gdybyśmy przypadkiem ważność tey
ostatney linii AB, znaleźli równą pra-
wdziwey iey ważności. którą wiemy;
byłoby to dowodem, żeśmy natrafili na
prawdziwą ważność linii DC, a zatym i
innych linii.

Gdyby zaś znaleziona ważność linii
AB, nie była równa ważności iey wiado-
mey; tedy następuiącą trzeba uczynić
proporeyą: iak się ma ważność mniema-
na linii AB, do ważności iey prawdzi-
wey, tak się ma ważność mniemana linii
CD, do ważności iey prawdziwey.

Przyflo-

Przystosowania do miar wysokości.

Mogą Nauczyciele namienić tylko o sposobach wyznaczenia wysokości jakiej, czyli to przystępnej, czyli też nie dostępnej, przez same żerdzie, albo przez odbijanie promienia światła padającego na powierzchnią jaką płaską, i poziomą do odbicia, albo na koniec przez wielkość cienia rzuconego od tego przedmiotu (objectum) którego wysokość wyznaczyć mamy.

Pierwszy z tych sposobów, iako w przepisach swoich, i z przyczyny łatwości, jest bardzo dobry, tak w używaniu bardzo nie doskonały. W ogólności nawet mówiąc, należy zawsze powątpiewać o działaniach, choćby też z najlepszych narzędziami czynionych, gdy idzie o wyznaczenie jakiej wysokości; iednostawna albowiem w sobie wysokość, nap: góry jakiej, może się wydawać czasem większą, a czasem mnieyszą, podług nie iednakowego stanu w którym się znajduje zwykła nasza. Powietrzniak; (atmosphera) iako o tym obszerniej będzie w Fizyce.

356. *Przystos.* 1. Niech będzie iaka wysokość nie wiadoma, do której iednak można

można prz
wielkość; z
od tycze wy

Wymierz
gruncie ob
kości; od
ki kączy
dwie linie
wykości
wara. Zn
kości rad
wepzien
raspina
we cała d
takie na p
kości i
kości. wy
my całą w
(g)

357. U
le przyka
ści. która

(g) H' d
wyje no
rzędz
Ingo
seu p
anak
tego

można przyśląpić: trzeba wyznaczyć iey wielkość; z punktu iakiego oddalonego od teyże wysokości.

Wymierzmy podstawę od punktu na gruncie chrstęgo, aż do spodka tey wysokości; od tegoż punktu uważamy iaki kąt czynią na płaszczyźnie pionowej dwie linie, jedna ku wierzchołkowi tey wysokości, a druga poziomem wykirowana. Znajdziemy wielkość tey wysokości nad linią poziomą (którą perpendykular poziomą uftawiamy pokazuje) przez następującą proporcję: Jak ię ma wstawiona cała do fizycznej kąta uważonego, tak ię na podstawie wymierzona do wysokości szukanej. Dodawszy do tey wysokości, wysokość namędzia, znajdziemy całą wysokość, której szukaliśmy.

(g)

357. *Uwaga.* Rzadko się trafia, aby całe przyśląpić można do spodka wysokości, którą wyznaczyć przypada. Tak

rap:

(g) W delizyeh przykładach trzeba zawyżze na to postępowanie, aby nie było nadmiernej odległości do wyznaczenia. Inngochonamyżne u: odległości; co albo se ugrazne kłade na bęznie, jann or anak okoliczności dostatecznie potrzebe tego okazy.

naprzykład; mając wyznaczyć wysokość wierzchołka wieży jakiej; baszty i t. d. nie można wymierzać podstawy, tylko aż do spodka iey murów; można iednak zmierzyć całą grubość wieży, baszty i t. d. a ztąd wnieść położenie iey, środka, a ztym i długość, którą dodać potrzeba do podstawy wymierzoney.

358 *Przystos. 2.* Niech będzie wiadoma wysokość (i) z której wierzchołka wyznaczyć przypada odległość punktu położonego na gruncie, a widzialnego z miejsca stanowiska.

Ustawiwszy kątomierz na płaszczyźnie pionowej, iak wyżej, naznaczmy kąt, który czyni perspektywa iedna w poziomie położenia, a druga wykierowana ku punktowi, którego odległości szukamy. Zrobmy potem tę proporcją; iak:
się

- (i) *Wysokości wieży, lub iakiego podobnego budynku łatwo dowieść można, spuszczywszy z góry nić do sznur, który potem zmierzony, da oznaczyć tę wysokość. Trzeba iednak mieć barzość na to, aby sznur iednakowo wszędzie był wyciągnięty. Obacz między innemi Dzieło już wyżej zalecone P. de Luc. Tom. 2. § 516.*

się ma wstawiać
naznaczonych
do odległości

Uwaga. Można także odległość, tylu punktów, już wiadomo, chotka wyznaczyć. Uważać, że robi perspektywę różnych punktów, czyli i połowę drugich.

350. *Przykład.* Znamy odległość punktu, na którym się znajduje.

(k) *Tę kąt*
przez
głównie
ładowany
długość
wyciągnięty
nie wypada
jednak
aż i o

się ma wstawia cała do dostyeczney kąta
naznaczonego, tak się ma wysokość dana
do odległości szukaney,

Uwaga. Można tym sposobem wyzna-
czyć odległość od spodka wysokości ia-
kiey, tylu punktów, ile zechcemy; mając
już wiadomą wysokość, z której wierz-
chołka wyznaczać przypada te odległo-
ści. Uważając zaś, iż znaczą kąty, które
zrobi perspektywa (k) kierowana do tych
różnych punktów, będzie można wyzna-
czyć i położenie ich, jednych względem
drugich.

350. *Problemas. 2.* Mając wiadomą od-
ległość punktu iakiego od spodka wyso-
kości, na której się stoi, wyznaczyć tę
wysokość.

Uwa-

(k) *Tę kątę ścieśle mówiac, nie tak czyni
perspektywa, coż do innego punktu na
gruncie położonego, kierowana, iako
bardziej płaszczyznu pionowe prze-
chodząca przez punkty te za każdym
celowaniem. Należy od niego to działa-
nie wykonać: od punktu będzie miał
po kolei projekcyje do różnych zarządze-
nia i opatrzne projektyuq ruchomy.*

Uważywszy kąt tak jak wyżej, zrobmy tę proporcją; Jak się ma wstawa cała do słycznej kąta uważonego, tak się ma odległość dana do wysokości szukanej.

360. *Przysł. 4.* Niech będzie wysokość niedostępna, trzeba ją wyznaczyć.

Sposób postępowania najpospoliciej używany, zawisi na tym, aby wymierzyć podstawę jaką wprost tę wysokość, której szukamy, i naznaczyć kąt pod którym z obydwóch końców tej podstawy, widzimy wysokość szukaną. Można ztąd doysć, tak wysokości, iako też i odległości iey spodka, od obydwóch końców podstawy.

Fig. 4. Niech SP wyraża wysokość, a AB podstawę wymierzoną wprost ku tej wysokości. Wyznaczymy kąty A i B, prze perspektywy, iedne poziennie ustawioną, a drugą ku wierzchołkowi S, wykierowaną.

W Troykącie ASB, zachodzi ta proporcya.

Wst. ASB: wst. A = AB: BS.

W Troykącie BSP, iest;

Wst. cała: wst. B = SB: SP.

Wiec wst. cała \times wst. ASB: wst. A \times wst. B = AB: SP.

361. *Uwaga 1.* Tego sposobu używając, można najprzód uchylić w braniu takiej podstawy, która by przedłożona było prowadzając, do wyłokosy podanej do wymierzenia: ponieważ zaś w wielu przypadkach trudno jest uchylić na takiej podstawie położenie, będzie więc i wyłokosy zniżej wyznaczania, niepożądane. Po wtóre, gdy podstawa AB, jest bardzo nachylona względem linii AS, bądź kąta ASB, pod którym pokazuje się ta podstawa AB, jest bardzo mały względem kąta ASP, a zatem i podstawa AB wymierzona jest bardzo mała względem całej podstawy AP; ztąd także wyznaczenie wyłokosy AS będzie mniej dokładne.

362. *Uwaga 2.* Gdy narzędzie, którego używamy, opatrzone jest wyłokosą pionową, to będzie łatwiej do dania tak dołżnego podłoża położenia, jakiego tylko grunt pozwoli.

Niech linia AB wyraża jakkolwiek Fig. 1.
podstawę wymierzenia, a linia SP, niech wyraża wyłokosę, której szukamy.

Utrwimyżi rolkę pionową tak, aby światło rzuciło na krawędź linijki, która S, a zatem, i y linia SP, wypadała na płaszczyznę tego półkola; uważamy

Z

kąt

kąt SAP na płaszczyźnie pionowej, i kąt PAB wyznaczony na płaszczyźnie katmierza poziennie ustawionego. Zrobimy to samo i na drugim itanowiku, przy punkcie B.

W Trojkacie PAB, gdzie wiadoma jest podstawa, i wszystkie kąty, będzie:

$$\text{Wł. APB: wł. ABP} = \text{AB: AP.}$$

W Trojkacie prostokątnym SAP, jest:

$$\text{Wł. cała: styczn. SAP} = \text{AP: SP.}$$

$$\text{Więc wł. cała} \times \text{wł. APB: wł. ABP} \times \text{styczn. SAP} = \text{AB: SP.}$$

Gdyby nawet dla jakiej zawady nie można razem brać kątów pionowych, i kątów poziomych: tedy jednak wyznaczając ciąg linii AP, BP, można y ośobno wyznaczyć kąty poziome: PAB, PBA. Z tym wszystkim wyznaczenie tego ciągu z wielką częstokroć pracą przychodzi.

362. *Przegl. 5.* Niech będzie dana nika na jakim gruncie, i niech będzie wyfokość niewiadoma, z której wierzchołka można widzieć końce tej linii danej. Trzeba wyznaczyć odległość tych dwóch

końców, od
mey, itęż (ai

z. Uważamy
ty nabożczy
ci, y dla p
wizyonu, i
nową, roz
dany. O
fjorha w
bera, i
choja z
tyca wyzn
promień w
reż, ych
wzajemny
bi na
mienia, pr
których z
wa rad
Heronem.
wartem
czym
włokosci, b
Trojka, na
wizyonu
zau ten Troj

Uważ.
B. a. zego
nia bga zaw

końców, od środka wysokości niewiadomey, i też samę wysokość.

1. Uważamy z wierzchołka wysokości, kąty na płaszczyźnie pionowej zawarte między liniami pionowymi i liniami z ciężarem zawieszonym, i między nimi kąt wykiernowaną ramię, do dwóch końców linii dany. Odległości tych końców, od środka wysokości, tak się do siebie mieć będą, jak szeregi końców uważanych; (będą zaś te odległości kątów tych wyznaczonych, gdy wysokość za promień wzięta będzie.) a z tym stosunek tych odległości będzie wiadomy. Uważamy i ten kąt, który się zrobi na płaszczyźnie rozkładu kromierza, przez płaszczyzny pionowe, na których zarysować będzie periskopowa najgłębiej do tych dwóch punktów kierowana. Ten kąt równy kątowi zawartemu między dwiema liniami prowadzonymi o końców podawy do środka wysokości, będzie kątem w wierzchołku Trojkatu, mającego wiadomą wysokość i wiadomy stosunek ramion, a zatem można ten Trojkat zupełnie wyrachować.

Uwaga. Gdy narzędzie tak jest zrobione, że go nie można użyć do pomiaru kąta zawartego między liniami.

reby od spodka wysokości prowadzone były do dwóch końców Podstawy; w takim razie, trzeba mieć wiadomą wżyskich tych trzech punktów odległość; wyiawwszy, gdyby dwa końce podstawy, były w iedney linii z spodkiem wysokości. (1)

PRZYDATEK II.

Pierwsze początki równoważenia.

W pierwszych początkach, na których się równoważenie (libellatio) załadza, można uważać ziemię, iakoby ta zupełne miała figurę kuli. Różnica zachodząca między tą inniemaną, a prawdziwą iey figurą (szpialczoną w końcach Osi) bardzo mały wpływa w działaniach, o których tu mówić się będzie; wiadomości zaś potrzebne do czynienia w rachunkach, popraw: z przyczyny nie zupełney ziemi okrągłości, byłyby teraz niewczesne i nad pojęcie Uczniów.

264.

(1) Gdyby nie było sposobności czynić na gruncie działań, wyrażonych w tych ośiainach, przyporządkowanych, tedy dla łatwiejszego uczniow porocia, można dzisiejsza te na figurach wyobionych z artema wykonywać.

264. Uwa
pełnie była
taczyną pr
ci; przecię
promień by
ziemi. Na
nym na 36
niekieci r
od Polkich
okrąg zaw
miejskich 5
ieft średn
mil prawie
1720.

Tę dług
z Niemieck
Arytmetyce
ziemi, więc

21000

7000

2800

230

365. Mo vi
...
od środka
wierzeana
punktata m d

264. Uważając Ziemię, iak głyby zupełnie była okrągłą, i przeciąwając ją płaszczyzną przez środek iey przechodzącą; przecięcie to byłoby kołem, którego promień byłby także sam, co i promień ziemi. Na okręgu tego koła podzielonym na 360 stopniów, rachując mil Niemieckich 15. (które nie wiele różnią od Polkich) na jeden stopień; cały ten okrąg zawierać w sobie będzie mil Niemieckich 5400, a zatem średnica iego, to jest średnica ziemi mieć będzie długości mil prawie 1719. albo, rachując okrągło: 1720.

Tę długość na mnieysze miary Polskie z Niemieckich zamieniając (spółobem w Arytmetyce podanym) będzie średnica ziemi, więcej cokolwiek niż.

21000000, łokci Polkich.

7000000, sążni

2800000, prętów

280000, łazurów.

365. Mowi się, że dwa miejsca są do równości (alibetum.) gdy równą mają od środka ziemi odległość. Y tak powierzchnia wóły stołcey, wżyskie punkta ma do równo wagi.

Gdy

Gdy linia iaka prostopadłą jest w punkcie powierzchni ziemi do iey promienia, przez ten punkt przechodząca linia przez jednego tego punktu (spólnego z promieniem), którego odległość od środka, równa się promieniowi ziemi, wszystkie inne swoje punkta, dalsze mieć będą w rzeczy samej od środka ziemi; ale że przy takiej wielkości promienia ziemi, różnica położenia tej linii, okazującej *równowagę pozorną* (libella apparus) od położenia wody stojącej, która okazuje *równowagę prawdziwą* (libella vero) ta różnica tak jest mała, że chyba w znacznej bardzo odległości da się postrzedz, przeto w zwyczajniejszych działaniach, można na tę różnicę względu nie mieć, i równowagę pozorną za równowagę brać prawdziwą.

W odległości 900. łokci, albo 300 sążni, różnica ta nie dochodzi 1. cala.

Fig. 6. Jakoż niech promień CA, wyraża promień ziemi, linia AB, niech wyraża stycznią do końca tego promienia prowadzoną, a bardzo małą względem niego. Niech BDDd wyraża linię, ciągniętą przez punkt B, i przez środek ziemi, spotykającą iey powierzchnię w punkcie D. i. d. Będzie $Au^2 = DB \times Bc$; aże linia BD jest

jest bardzo m
dzie prawie

Niechby AB,
znajdziemy
łocia, to ie

Linia ta
na kwadrat
ległościach
fzech od g
i. d. razy

366. Lu
ziemi, ię b
ściatey zie
du nie mie
ściac; te
przykładu
postrzegm
kwaremacy
głą wody
znajdujące
lebrant rz
wyrzucił
wody z ie
wadzać.

367. Pr
wyznaczal

jest bardzo mała względem linii B1. będzie prawie $AB^2 = Dd \times BD$; a $BD = \frac{AB^2}{Dd}$.

Niechby AB, zawierała w sobie łokci 900. znajdziemy BD mniejszą od $\frac{1}{4}$ części łokcia, to jest mniejszą od cała.

Linia ta BD jest prawie proporcjonalną kwadratowi linii AB; a zatem w odległościach, 2, 3, 4, 5, i t. d. razy mniejszych od 900. łokci, będzie, 4, 9, 16, 25, i t. d. razy mniejszą od cała.

366. Lubo nierówności na powierzchni ziemi, są bardzo małe względem wielkości całej ziemi, a zatem można nie względem nie mieć w niektórych okolicznościach; te jednak nierówności wiele się przykładają do odmian, które na ziemi postrzegamy. Gdyby nam: ziemia była matematyczną kula, to jest zupełnie okrągłą, wody wbyłyby naicy powierzchni znajdujące się byłyby ścianami: nie byłoby ani rzek, ani strumyków, ani źródeł, wytryskujących i szukałoby tylko, można by wody z jednego miejsca na inne sprowadzać.

367. Przez działania równoważenia, wyznaczają się te nierówności, czyli różnica

znica; która zachodzi między odległością od środka ziemi, dwóch, albo więcej punktów. Przeto dochodzenie jakiegokolwiek wysokości, można by sobie wyobrazić pod ogólnym tym wyobrażeniem działań równoważenia; zwyczajnie jednak działania te daley się nie rozciągają, iak do wyznaczenia pomniejszych wysokości, a szczególniej do sprowadzenia wód z iednego miejsca na drugie; co obszerniej zwykło się wykładać w Fizyce.

W działaniach równoważenia, używane są niektóre narzędzia, służące do wyznaczenia linii prostey ukazującey równowagę pozorną. Tych wszystkich narzędziów opisanie, wieleby tu miejsca zabrało, (m) wyrażą się iednak potrzebniejze.

368. Równowaga wodna, iedna z najprościeyszych, składa się z rurki mosiężney

(m) Dokładne i obszernie opisanie tych narzędziów. znajduje się w Książce P. Pirkarda o równoważeniu, która z wielką przydatkami wyłożona jest z Francuzkiego na Niemiecki język przez P. Lamberta. Wiele także doczytać się można w książce napisanej w tej materji przez P. Le Febure.

zney, albo
szklanych
przy końcach
Woda w r
chodzi przez
dwóch bar
Odziana
dże drewn
nieży, albo

369. U
że woda p
lub więcej
dnego do
wagi. Z
żywać po
wagi, gdy
łym okiem
wionym, a

370. Uk
załadza się
leż zego o
powietrze
te, wychod

Jest to ie
ustawienia
albo raczej
prawioney.

żney, albo blaszaney, i z dwóch butelek szklanych iak nayszerzoczyliższych, przy końcach teyże rurki przyprawionych: Woda w tych butelkach zawarta przechodzi przez rurkę, i w równey wobydwoch butelkach utrzymuje się wysokości. Ośladzana bywa taka równowaga na nodze drewnianej, podobnie iak itolik mierniejszy, albo kątomierz.

369. Używanie iey natym się załatwia, że woda przez otwarcie iakiego łącznika lub więcey naczyń, przechodząca z jednego do drugiego, układa się do równowagi. Z wielką jednak ostrożnością używać potrzeba, tey tu opisaney równowagi, gdy bez pomocy perspektyw, chylimy okiem do powierzchni wody przyśtuwionym, celujemy do iakiego miejsca.

370. Układ równowagi powietrzney załatwia się na właściwości powietrza, ialek zego od wody. Przez tę właściwość, powietrze w rurce wraz z wodą zamknięte, wychodzić nad wodę musi.

Jest to ieden z najlepszych sposobów do ustawienia, podług równowagi, prawidła, albo raczey perspektrywy do niego przyprawioney.

Równo-

Równowagi powietrzne do wielkiej doskonałości można przyprowadzić, iako to, opisując równowagę Brandera, obszernie wywodzi P. Lambert w przydatkach swoich do książki Pikarda. Robią jeszcze i równowagi próżne, to jest takie, z których powietrze jest wyciągnięte.

Te równowagi za świadectwem X. Fontany, najmniejszą nawet nierówność poznać dają.

371. Do wykierowania linii, prawidła, lub perspektywy, podług położenia poziomnego, służy też i nić, która przez ciężar w końcu siey zawieszony do pionu się układa.

Ta nić ponieważ jest prostopadłą do linii jakiegokolwiek poziomney, na tey więc zasadzie robić zwykli, innego jeszcze gatunku równowagi, nazwane równowagami *Pikarda*, *Huyghensa* i t. d.

372. Do działaa równoważenia, potrzebny także jest pręt podzielony na łokcie, cale i t. d. na który wkłada się znak z papieru grubego, lub inny podobny, mogący się posuwać wzdłuż pręta; a na środku tego znaku ma być cel wyrażony, któryby i z daleka rozeznąć można.

373. Niech będą dwa, jakiegokolwiek miętyca, których różność równowagi trzeba znaleźć.

Postawmy narzędzie na jednym z tych miętyca, a na drugim pręt na lekcie, całe i t. d. poźzielony. Perspektywę poziomnie, czyli do równowagi ułożoną kierujemy ku prętowi: do którego znak przyprowadzony, ma być przez inną ośbę przesłuchany, lub podnieszony powy. poki środek tego znaku nie przypadnie w linii prostej, którą poziomnie perspektywę położenie wyznacza. Jeżeli wysokość tego środka znaku, od środka pręta rachowana, będzie równa wysokości perspektywę rachowanej, od środka pręta, na której całe narzędzie z perspektywą jest warte, tedy dwa te miętyca będą do równowagi. Jeżeli zaś wysokość środka znaku będzie większa, lub mniejsza od wysokości perspektywę, tedy środek pręta będzie tyle niższy lub wyższy od spodka naszego narzędzia, i to jest różnica między temi dwiema wysokościami.

Tego sposobu równoważenia używać tylko można w odległościach na 100, a najwięcej na 200, sążni.

W większych odległościach, uchybienia byłyby znaczniejsze, tak z przyczyny
zbo-

zbożenia światła łamiącego się w powietrzu, iako z niedokładności narzędzia, które w większych odległościach większe też sprawuje uchybienie, a nakoniec i z przyczyny różnicy, zachodzącej między prawdziwą i pozorną równowagą.

374. Po części można się ustrzedz tych uchybień, i raczy one zmniejszyć, stawiając narzędzie w równej, ile być może, odległości, między dwoma miejscami, które równoważyć mamy. Obydwóch tych miejsc trzeba wyznaczyć równowagę względem tego średniego stanowiska. Ponieważ zaś różnica wysokości środka znaku na dwóch tych miejscach położonego, jest różnicą tychże miejsc wysokości, iedney względem drugiej, tą więc różnicą będzie wyższe od drugiego to miejsce, w którym znak niżej jest położony.

Przez to dwoiakię działanie, można z iednego stanowiska równoważyć dwa iakie miejsca, których odległość zawierałaby nap. 300. sążni, a zatym iużby nadto wielka była, aby w niey pierwszego do równoważenia sposobu użyć godziło się.

375. Gdy miejsca do równoważenia wyznaczone, są ieszcze odlegleyse, nap.

na

raiedne,
od drugieg
legiesć po
żca zawie
piero z po
odległosci
li granice.

Przez
znajcz
wykłość
Przez dru
cę wykł
trzechgo
czony
tego pu
czy cęg
ny też y
jednu s
iżnie v
g... kółce

376. G
ię od każ
go iedn
równy
przez nac
żeniu por
wyłokosci
ktem ratę
naczy

na jedne, lub dwie mile dalekie, iedno od drugiego, można tę przywieszoną odległość podzielić na części, z których każda zawierałaby około 500. fathów; a dopiero z pośrodku każdej tey najmieyszej odległości, równoważyć iey końce, czyli granice.

Przez pierwsze takowe działanie, znajdziemy różnicę pierwszego punktu wysokości od drugiego następującego. Przez drugie działanie znajdziemy różnicę wysokości tego drugiego punktu od trzeciego, i tak dalej aż na koniec znajdziemy różnicę wysokości przedostatniego punktu od ostatniego, który kończy całą odległość. atym samym dojdziemy też y różnicy wysokości pierwszego punktu od ostatniego. to jest dojdziemy różnicy wysokości między iednym i drugim końcem całej odległości.

376. Gdyby się zdarzyło, że postrzegając od każdego punktu początku do innego końca najwyższego, każdy taki punkt następny byłby wyższy lub niższy od poprzedzającego. z którym się w równoważeniu porównywa, tedy suma różnic wysokości między iednym i drugim punktem następnym pokazałaby całą różnicę między wysokością dwóch punktów

koń-

kończących całą odległość. Ale jeżeli te punkty następne, są ią przemianowane wyżej, a drugie niżej względem tych, z które ni się przy każdym działaniu porównywały, tedy wzięść trzeba sumę różnic wyłoków punktów wyższych, które przy każdym następnym działaniu są wyższe, od tych, z które ni się porównywało (połępując zawsze od jednego końca całej odległości, do drugiego). Trzeba jeszcze wziąć i sumę różnic wyłoków punktów wyższych, które przy każdym działaniu następnym są niższe od tych, z które ni się porównywało w tę samą stronę co y pierwey poępując.)

Jeżeli te dwie summy będą równe, znakiem to będzie, że obaśwa całej odległości końce są do równowagi. Jeżeli zaś te dwie summy będą nie równe, tedy ostatni koniec odległości, tyle wyższy, lub niższy będzie od pierwszego, ile pierwsza summa większa lub mniejsza jest od drugiej.

377. Aby nie być obowiązany porównywać przy każdym stanowisku, wyłoków dwóch punktów przypadających do równoważenia, lepiej jest, że dwa pomocnicy rachować będą wyłoków znak,

lu,ione d
żem (zacz
wyłoków
do porówn
ra letzচে
pomocnicy
szczegółowy
ccowi całej
dy porówn
kie podzi
lecie od pie

Po skoń
gitych.
summa wy
onika nazn
summe zbie
rd drugiego
dwóch sum
dwóch punk
równowazy
będzie wyż
powiększe

378. Co
położonych
jak nap. 23
nie wyłok
leżących M
leżących M
żonych, ad

tu, i one dla pamięci zapisywać pokazem (czekającym) działaniu. Jedną z tych wysokości oznaczonych, będzie służyć do porównania jej z inną następną, która będzie nieistotniejszą. Ci dwaj pomocnicy będą służyć będą po każdym szczególnym działaniu, ku drugiemu końcowi całej odległości: ten, który wprzód porodził, stanie przy następującym punkcie podziału, a drugi stanie przy punkcie od pierwszego oznaczonym.

Po skończonych tych wszystkich szczególnych działaniach, zbierając wraz summa wysokości od pierwszego pomocnika oznaczonych, i podobnie wiedząc sumę zbiorą tę wysokości oznaczone od drugiego pomocnika. Różnica tych dwóch sum, będzie różnicą wysokości dwóch punktów skrajnych, któreśmy równoważyć postanowili. Ten zaś punkt będzie wyższy od drugiego, któremu odpowiadająca summa będzie mniejsza.

374. Co się tyczy równoważenia miejsc położonych w Kraiach bardzo odległych; jak np. gdyby trzeba wyznaczyć różnicę wysokości miejsc położonych przy brzegach Morza śródziemnego, o i wysokości miejsc innych wśród Polski położonych, albo przy brzegach morza Bałtyckiego.

tyckiego; rozumiem że pewnie o tym mo-
wa będzie w Fizyce. Można w tey mierze
czytać między innemi Dzieło wielkie P.
De Luc. o różnych umiarkowaniach po-
wietrzni otaczającej ziemię (sur les mo-
difications de l'Atmosphere.)

ROZDZIAŁ XIII.

*O Kwadrowaniu koła, czyli o wyna-
leżeniu Powierzchni Koła.*

379. OBwody Wielokątów forem-
nych podobnych sobie, tak się
do siebie mają, iak promienie koł w nie
wpisanych, lub na nich opisanych. Po-
wierzchnie tychże Wielokątów, równa-
ją się Troykątom mającym za wysokość
promienie koł wpisanych, a za podstawę
obwód Wielokątów. Też powierzchnie
Wielokątów foremnych podobnych do
siebie, tak się mają do siebie, iak kwadraty
promieni koł wpisanych i t.d. Wszystkie
te Twierdzenia nie zawisły od liczby bo-
ków w Wielokątach, i zawsze są prawdzi-
we, chociażby największa była liczba
boków.

380. Zgadź się, że prawdziwe bę-
dą te wszystkie Twierdzenia, gdyby na-
wet liczba boków tak wielka była w
wie-

wielokatach, żeby ich od kół rozróżnić pod tym, i gładkim promieniem ko' wni-
tanych i opłakanych różnicy między b' a
nie miedzy, ale ledrym promieniem wyda-
wały się. (n)

A a

381.

(n) *Talawa rozmowa, przysłała Gro-*
ma do, że no k' ta ma k' zagnane
między w d' o' t' a' m' a' n' i' i' o' p' i-
nyu' a' r' o' b' a' t' o' t' o' n' a' k' o' r' e
o' w' o' b' i' a' c' a' k' i' a' z' a' d' o' t' o' p' o' r' o' b' o
b' e' a' z' i' p' r' a' y' p' r' o' z' y' a' z' a' n' a' t' y' o' d-
z' a' t' a' w' y' t' o' n' e' r' e' z' i' o' n' k' e' l' a' p' o' t' a' y' p' o-
f' i' a' c' i' a' . *Przeł i' e' n' e' k' p' r' e' z' d' u' a' z' a' z'*
poprzedzając, dochodzi i' o' s' i' i' m' a-
ku w' o' l' e' y' u' b' y' l' i' p' r' e' z' i' a' r' a' z' i' a' z'
p' u' n' e' z' i' a' z' i' m' i' e' p' o' d' z' e' p' r' e' d' o-
z' a' t' e' c' a' w' i' a' k' i' a' t' h' o' l' i' g' a' z' a' y' a' n' i' e' k' i' a'
l' i' z' a' t' o' r' o' b' o' t' o' t' a' m' i' e' n' g' o' p' o' d
po' s' t' a' t' i' a' z' a' k' a' z' a' n' i' e' m' i' e' n' g' o' p' o' d
ba' p' o' t' e' n' e' w' e' z' i' a' b' y' t' o' p' o' d' a' t' y' a'
w' o' l' e' k' k' i' a' z' a' z' a' z' o' n' y' . *P' o' s' t' a' z' a'*
o' n' i' i' p' o' s' t' a' z' i' e' p' o' i' o' n' i' k' o' t' n' e' z' a' y'
w' t' a' t' o' r' y' m' p' r' e' c' h' o' d' z' e' n' i' a' ; *g' r' a' z'*
ś' i' e' m' o' i' e' t' a' t' i' a' k' r' z' y' w' a' n' e' m' o' z' e'
b' y' ć m' e' z' a' t' a' . *l' i' k' o' z' b' i' o' r' w' i' e' l' a' l' i' i' p' r' o-*
f' i' c' y' b' a' z' a' z' o' m' e' t' y' c' h' . *d' o' j' e' d' n' a' k' u' l' o-*
n' o' t' . *N' a' t' o' p' r' e' z' i' o' n' e' z' a' z' a' z' i' e' k'*
p' o' s' t' a' t' i' a' z' a' k' a' z' a' n' i' e' m' i' e' n' g' o' p' o' d
ba' p' o' t' e' n' e' w' e' z' i' a' b' y' t' o' p' o' d' a' t' y' a'
w' o' l' e' k' k' i' a' z' a' z' o' n' y' . *P' o' s' t' a' z' a'*
o' n' i' i' p' o' s' t' a' z' i' e' p' o' i' o' n' i' k' o' t' n' e' z' a' y'

381. *Teżenie przepłane*. Można
znowu obrażać myślą podzielić ilość jaką
na tyle części równych, aby każda ta
część w liczbie miała miaryszab 1, ni-
żej inna jakakolwiek ilość naznaczona.

Dowód. Pomnożmy tę drugą ilość
naznaczoną, tyle razy, ile potrzeba,
aby była stała większa od pierwszej ilości
danej; patyleż części równych podzieli-
my ilość pierwszą, ile razy była pomno-
żona ilość druga; każda takowa część
ilości pierwszej, miaryszab będzie od ilości
drugiej naznaczonej.

W szczególności mówiąc, gdy się we-
źmie połowa ilości jakiejś ilości, i
tej połowy połowa, to jest czwarta
część całej ilości, i znowu tej ostatniej
połowy połowa, to jest osma część całej
ilości, dalej połowa tej osmej czę-
ści, to jest część szesnastą i t.d. dorywając
się na ostatek do takiej części, która
miałaby.

Wszystko to nie było o ści-
śle rozumie sięgo i przedstawienie nam to
wprost, a jeżeli wprost sięgo
pierwsza Matematyka poczyniła
cy, to też i dla uproszczenia
zawieszę w dokładność Matematyczną.

musimy badać od wszelkiej ilości ra-
zności. (6)

574. *Theridion* L. Można opisać na
koło dany. I wypisać wół foremne dwa
takie wielokątne podobne. Aby kołunek
ich obwód był przy sobie białej, do
kołunku równości. i tak kołunek
inny kołunek nierówności narysowany.

Przekład. Można wypisać wół i na-
nim opisać dwa wielokątne foremne po-
dobne. takie. i wypisać nań co obwo-
dów materiały od dany i wypis-
kąd części obwodu, jednego z nich.

Niech będzie CA promień koła, podzie-
lony na dziesięć części równych, i niech
AB jedną taką część wyraża. Tab.
XVII.
Fig. 1.

Przez B przeciągniemy DED, prosto-
równą do promienia. I wypiszemy odcinek
koła w punktach D, i E. I oznaczmy o-
dcinek koła, na 2, 4, 8, 16 i t. d. części rów-
nych, poły, póki nie dojdziemy do czę-
ści

At 2 ści

(6) *Przekład koła. Narysować Uż-*
ycie koła i promienia. I wypisać nań
co obwodu. i wypisać nań co obwo-
dów materiały od dany i wypis-
kąd części obwodu, jednego z nich.

ści koła mniejszy od łuku DAd. Niechby na przykład łuk EAe był jedną z tych części mniejszych od łuku DAd; punkt A niechby go dzielił na dwie części równe EA, Ae. Pociągnijmy linią Ee, która będzie prosta (padła do AC). Przez punkt A niech przechodzi styczna FAf, i niechaj dwa promienie Cb, Ca, schodzą się z tą stycznią w punktach Ff. Linie Ee, Ff, są bokami dwóch wielokątów foremnych podobnych, jednego w koło wpisane, a drugiego, na kole opisanego; a zatem owo dy tych dwóch wielokątów będą, iak boki Ee, Ff, albo iak linie CG, CA. Więc różnica obwodów tych dwóch wielokątów, będzie do obwodu większego wielokąta, iak linia AC, do linii CA. A że linia AG mniejsza jest od linii AB, to jest od dziesiętej części linii CA; więc różnica dwóch obwodów mniejsza będzie, niżeli dziesiąta część obwodu wielokąta na kole opisanego.

Gdyby linia AB była $\frac{1}{4}$ linii BC, albo $\frac{1}{2}$ linii AC, można by podobnym sposobem dowieść, że różnica dwóch obwodów, tak się ma do obwodu wielokąta w koło wpisane, iak linia AG do linii CG. A że AG, mniejsza jest od AB, więc

wiec tym samym sposobem dowieść, że różnica dwóch obwodów, tak się ma do obwodu wielokąta w koło wpisane, iak linia AG do linii CG.

303. Wzrost wielokątów opisanego koła do obwodów wielokątów wpisanych, iak linie AG do linii CG.

Przedłożony wielokąt wpisany, iak linie AG do linii CG.

(2) Długość linii AG do linii CG.

więc tym samym mniejsza jest od $\frac{1}{2}$, tej części linii EC, a tym bardziej mniejsza będzie od 100-ty części linii CG. Różnica tedy między dwoma obwodami wielokątów nieczyli byłaby, od 100-ty części obwodu wielokąta w koło wpisanego. (p)

392. *Wniosek 1.* Można w koło wpisać wielokąt jeden foremny, i drugi podobny ranin opisać, tak: a y środek obwodu koła do obwodu jednego z dwóch wielokątów bardziej był przybliżony do środka równości, niżeli jakkolwiek inny środekznaczony.

Przykład. Niechby opisany nakale był jeden wielokąt, a drugi podobny w koło wpisany, i niechby różnica ich obwodów mniejsza była od $\frac{1}{2}$, części obwodu wielokąta wpisanego.

Rożni-

(p) *Dawajemy przykład liczbowy dla łatwiejszego pojęcia. Zauważ, że to rozumowanie, może być w sobie niezuwidy od tych liczb, i mogą być przybliżone do istoty, i w nich; przez to dowodzenie może być tego szczególnego przybliżenia, ani mniej dokładnym, ani mniej ogólnym.*

Różnica obwodu wielokąta ośmianego, od obwodu koła mniejsza będzie niż różnica obwodu tegoż wielokąta od obwodu wielokąta wpisanego; to jest mniejsza niżeli $\frac{1}{2}$ części obwodu wielokąta wpisanego, a tym bardziej różnica od $\frac{1}{2}$ części obwodu koła.

Różnica także obwodu koła od obwodu wielokąta wpisanego mniejsza jest, niżeli różnica między obwodami dwóch wielokątów, a zatem mniejsza od $\frac{1}{2}$ części obwodu wielokąta wpisanego, a dopieroż mniejsza od $\frac{1}{2}$ części obwodu koła.

384. *Wniosek 2.* Mając daną linią prostą, wziętą za równą okragowi koła danego, wpisać w to koło, i opisać na nim wielokąt, których obwodów różnica od obwodu koła mniejsza byłaby, niżeli linia dana jakiegokolwiek małości.

Porozumy ośmiarną tę linią tylorazy, aż wielokąt będzie od linii wziętej za równą okragowi koła. Niechby na przykład 10. razy powiększona była ta linia. Wpiszmy w koło i opiszmy na nim dwa wielokąty foremne podobne, którychby różnica obwodów mniejsza była od $\frac{1}{2}$ części obwodu jednego z nich. Będzie zatem

tym różnica obwodu koła od obwodu
kierokowickiego z tych dwóch wielko-
ści mureyła i kół $\frac{1}{2}$, ta część obwodu,
jednego z tych wielkości. i murey-
ła obwodu wielkości wpisanego a
dotyczy mureyła i kół $\frac{1}{2}$, ta część o-
brotu i kół, a i mureyła, niż kół
dane wyznaczony mureyła.

387. *Tierdz. 2.* Okręci kół tak się
naga do siebie, jak ich promienie.

Niech będą dwa koła C y c, a tych o-
kręci O y o, promienie zaś P y p, gdzie
zatem O : o = P : p.

Ciebie zaprawia w całym ciele,
toły parały doświadczenia w całej
lub mureyła od drugiego. W pierwszym
razie trzeci wielkości i drug, o, w
drugim okrąg O, a i mureyła i p, o-
cześnie; a z tym wielkości i mureyła
powiększyć kół z okręgów dla zrobie-
nia mureyła.

Niechby kół proste L, wielkości kół
okręgi O, i mureyła kół (jeżeli po-
dobne) L : o = P : p.

O i mureyła na kół C wielkości for mureyła,
które, o, różnica o wola, od obrotu
kół,

kola, mniejsza była, niżeli różnica L. od O. Na drugie także kole o, opisanie wielokąt foren y podobny nierównemu. Ośrodku tych dwóch wielokątów tak się mieć będą do siebie, jak promienie P y p, kół C y c; albo tak L. do o, (ponieważ miało być $L : o = P, p$.) Aż obwód pierwszego wielokąta, mniejszy jest niżeli L, więc i obwód drugiego, mniejszy być powinien niżeli o, to jest mniejszy niżeli obwód koła, na którym jest opisany, co być nie może.

Węzłofunek promieni dwóch kół, nie jest większy od mniejszego od sfunktu ich okrągów, a zatem równy jest także sfunktowi.

386. *Wniosek 1.* Idzie zarym, że sfunek okrągu koła jednego, do swego promienia, tenże sam jest, co i sfunek króregookolwiek innego koła, do swego także promienia.

Przeto gdyby można znaleźć sfunek jakiegokolwiek koła, do i go promienia, już tym samym byłby znaleziony sfunek każdego innego koła do swego promienia.

387. *Wniosek 2.* Dwa prostokątne Trójkąty są do siebie podobne. Gdy ma-
ią

ią za wielkości, przemiennie dwóch kół, a za podługą linię wzięte za równe okręgi, m. t. y. kół; a zatem także dwa Troykaty będą do siebie wielokrotnie dwumianem ich boków, na przykład promieni dwóch kół,

389. *Twierdź. 3.* Powierzchnia koła równa jest powierzchni Troykata, mającego za wyłoni się promień tego koła, a za podstawę tego okręgu.

Dowód. Gdyby ten Troykat, nie był równy powierzchni koła, byłby od niego większy, albo mniejszy, a zatem koło byłoby równe innemu Troykatowi teyże figury wielkości, za podługą zaśmiałemu linię większą, albo mniejszą od okręgu koła.

Nazwiemy okrąg koła, O, a tę linię większą albo mniejszą od okręgu, nazwiemy L.

W pierwszym razie, w którym ta linia L, większa byłaby od okręgu koła, opiszemy nad nim wielokąt ścięty, którego obwód mniejszy byłby niż od okręgu koła, niżeli się różni od niego linia L; a zatem linia L, większa była od obwodu wielokąta. Powierzchnia tego wielokąta
byłaby

byłaby mniejsza od powierzchni Trójkąta małego za wysokość, promień koła, a za podstawę, linia L, to jest byłaby też powierzchnia wielokąta, mniejsza od powierzchni koła, na którym wielokąt jest opiany; co być nie może.

W drugim razie, w którym linia L, mniejsza byłaby, od okrągu koła, wpisanego w koło wielokąt foremny, którego obwód mniejszy się różni od okrągu koła, niżeli linia L, a zatem obwód wielokąta byłby większy od linii L. Wpiszemy w to samo koło wielokąt inny foremny, tyle dwójce co pierwszy boków zawierający.

Powierzchnia tego drugiego wielokąta, równałaby się Trójkątowi małemu za wysokość, promień koła, a za podstawę obwód pierwszego wielokąta; (268) to jest linią większą od L.

A zatem powierzchnia tego wielokąta wpisanego w koło, większa byłaby niżeli powierzchnia koła, co być także nie może.

Wiec powierzchnia koła, ani jest większa, ani mniejsza od powierzchni Trójkąta małego za wysokość, promień tego

tego k. i. a. a za podstawę jego okręgi: a
zatem równa jest powierzchni tego tró-
jkąta.

389. *Wniosek 1.* Powierzchnie kół są
do siebie w stosunku odwrotnym do
promieni, albo średnic: tzn. to gębszy pro-
mien kół były, jak kół: 1. 2. 3. 4. 5.
it d. powierzchnie tych kół byłyby jak
kwadraty: 1. 4. 9. 16. 25 it d.

390. *Wniosek 2.* Powierzchnia kół, tak
jak i do powierzchni wielokątów na nich
opisanych, jak ośmiokąt, do ośmiokąta
wstępnego. A w szczególności powier-
szchnia kół, tak figury do powierzchni kwa-
dratów na nich opisanych, o. t. c., co tak samo
wydaje, do kwadratu średnicy, jak fig-
ura na okręgu kół, do ośmiokąta tego kwadra-
tu: to jest, jak fig. na okręgu kół, do o-
śmiokąta średnicy zewnętrznej wpisanej, czyli
do kół tak długiej, jak zewnętrznej średnicy.

Zgad porównanie doł kół do powierzchni
kół, a powierzchnie kwadratów, a zatem i
porównanie kół z powierzchnią kwadratów
kół, jak figury wpisane, znowu do
porównania kół z kwadratem, z kwadratem
promienia, albo (co to samo wyprowadzi) kwad-
ratu średnicy kół, zawsze od nas, nie ma-
jąc o okręgu, ośmiokąta, a o wyłączeniu
linii prostej równoległej zewnętrznej kół.

391. *Wniosek 3.* Wszystkie sposoby postępowania, które się wyżej podawały, do zrobienia kwadratu równego sumie, albo różnicy dwóch innych kwadratów danych, końcem powiększenia lub zmniejszenia kwadratu w danym stosunku, mogą być równie do celów przyrządzonych, czyż nie na ich promieniach lub średnicach, te same działania, któreby się na nich czyniły, gdyby były bokami kwadratów, na których podobne odmiany czynić przypadałoby.

A w szczególności, chcąc podzielić powierzchnię koła danego, na pewną liczbę części równych, przez *koła współśrodkowe* (circuli concentrici); trzeba podzielić promień tego na tyleż części równych, zaczawszy od środka, tak, aby odległości punktów podziału coraz dalszych od tegoż środka, były do siebie jak kwadraty liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. Niechby nap. przyp. dało podzielić koło na 7. części równych przez koła współśrodkowe. Podzielimy promień na 7. części równych; średnice Geometryczne między odległościami punktów podziału od środka, i całym promieniem, będą promieniami cel, poł. średnicowych, przez które poizielona będzie powierzchn.

wierzchnia
równych.

392. W
ciach. i o
od wyznacze
ianym rzecz

1. Powi
powierz
na 2. jak
k 1; to je
właściw
jak, do T
kość t. rze
koła. Ade
nony po
Tężając
ci ka.

2. Odśnek
nią międz
sam lekco
równorami
ktem podzi
ku koła.

Ade pow
Trójkąto
niach. a z
wierzchnia
(wzawiz

wierzchnia kola danego, na 7. części rownych.

392. Wyznaczenie powierzchni wycinków, i odcinków kol. zawisło także od wyznaczenia okrągu kola. Jakoż w samej rzeczy,

1. Powierzchnia wycinka tak się ma do powierzchni kola, do którego ten wycinek należy, jak da ma łuk wycinka, do okrągu kola; to jest tak się ma Trojkąt, którego wysokością jest promień, a podstawą, ten łuk, do Trojkąta mającego za wysokość tenże promień, a za podstawę okrąg kola. Aże ten ostatni Trojkąt byłby równy powierzchni kola, więc pierwszy Trojkąt równy jest powierzchni wycinka.

2. Odcinek mniejszy od pół kola, jest różnicą między wycinkiem mającym tenże sam łuk, co i odcinek, i między Trojkątem równoramionnym mającym spólną z wycinkiem podstawę wierzchołek, zaś w środku kola.

Aże powierzchnia wycinka, równa się Trojkątowi mającemu za wysokość promień, a za podstawę łuk wycinka; a powierzchnia Trojkąta o którym mowa (wziąwszy w nią za podstawę, jeden z
pro-

promieni to jest z ramion jego, a za wysokość wstawę łuku należącego do wycinka) równa się Trójkątowi małowemu za wysokość promienia, a za podstawę wstawę łuku; więc powierzchnia odcinka większego od półkola równa się będzie Trójkątowi małowemu za wysokość promienia, a za podstawę różnicę łuku wycinka od wstawy tegoż łuku. Arystotelesze ta powierzchnia wyraża się różnicą między liczbą oznaczającą połowę promienia, przez liczbę 1, i liczbę oznaczającą różnicę łuku wycinka od wstawy tegoż łuku.

Powierzchnia odcinka większego od półkola, jest sumą z wycinka zawieszonego między dwoma ramionami tegoż łuku większego od półkola, i z Trójkąta, w którym, wzięwszy za podstawę promień, wysokością byłaby wstawę łuku czyniąc go z łukiem pierwszym okręgu cały; a zatem powierzchnia tego odcinka, równa się Trójkątowi małowemu za wysokość promienia, a za podstawę, sumę z łuku odcinka tego, i z wstawy łuku, który (połączony jest pierwszym łukiem do tego okręgu, albo, (co należało wychodzi) z wstawy różnicy między łukiem odcinka, i półokręgiem.

393. Definicja: W kołach niechże dany będzie promień, wycinki i odcinki półokręgu,

te są, których luki są do siebie podobne, to ich różnica jest w sobie w sobie znowy taka, ale luki są do siebie, jak one są, a nie jak promienie tych luki.

304. Twierdzenie 4. Wycinki i odcinki podobne, w których luki są do siebie podobne, tak się mają do siebie, jak koła, do których należą.

Fig. 2.

1. Niech będą dwa wycinki podobne $ACBDA$, $acbd$, te dwa wycinki są do siebie jak koła, do których należą.

Dowód. Wycinek $ACBDA$, tak się ma do koła, do którego należy, jak i $acbd$ do koła, do którego należy, albo (301) jak i $acbd$ do okręgu $acbd$, to jest, jak wycinek $acbd$ do koła, do którego należy. Węzła dwa wycinki są do siebie jak koła, do których należą, to jest, jak koła, dwumnożnym promieni także koła.

2. Niech będą dwa odcinki: $ARDA$, ar , da , te dwa odcinki tak się mają do siebie, jak koła, do których należą.

Dowód. Wycinki $ACBDA$, $acbd$, mają do siebie w stosunku dwumnożnym

nym promieni CA, ca , to jest jak CA^2 do ca^2 . Trojki są podobne: $ACBA$, acb, w tymże samym ieden do drugiego są stosunku; więc też są wycinki też są do siebie mają stosunek, co i te są Trójki. Więc trójka (albo summa) pierwszego wycinka, i pierwszego Trójki, to jest odcinek $ABDA$, tak się ma do różnicy (albo do summy) drugiego wycinka i drugiego Trójki, to jest do odcinka $abda$, jak się ma pierwszy wycinek do drugiego: to jest w stosunku dwunastym promieni kół, do których te odcinki należą.

395. *Defn.* Niech będą dwa kół, współśrodkowe, między dwoma promieniami ich okrągami, nazywa się Koroną.

396. *Twierdzenie 5.* Powierzchnia innej takiej korony równa jest prostokątowi mającemu wysokość równą różnicy tych koron, i apotecie słupu okręgowi kół, których promienie tworzą się po sobie summa promieni kół, w dwóch koronę tę zawierających.

Fig. 3. Niech będą CA, CB , promienie dwóch kół współśrodkowych; promienie AB na dwie równe części w E , h i h , będzie połową summy dwóch promieni CA, CB .

CB należą
kół, i
kółami, ró
n, szeroko
zapoczą
laby prom
średni d
ię okręgu
CA. Złaz
a przez on
kół, i
fotkania
i G.

Ponieważ

i

więc

Aże AD

kręgi, i

więc i EE

Podobny

że linia i G

promienien

Powierz

mi są CA,

CAD, i CB

CB należących do dwóch koł. Środkowycy; kromka zawarta między temi kołami, równa jest promieniowi mniejszemu szerokość AB tej kromki zawyżając, a także odstawy od kromki, która jest promieniem. Porównajmy AD przynależną do AC, i dajemy, że AD równa się okręgowi, którego promieniem jest CA. Złączmy punkta C i D. Linia CD, a przez punkta B i E, rozciągnijmy dwie linie równoległe od AD, do których skośnika się z linią CD, w punktach E, i G.

Ponieważ $CA : CB = AD : FE$

i $CA : CB = \text{okrąg} : \text{okrąg}$

więc $AD : BE = \text{okrąg} : \text{okrąg}$

Aż AD wzięta jest za linią równą okręgowi, którego CA jest promieniem, więc i BE = okręgowi CB.

Podobnym sposobem dowieść można, że linia EG, równa jest okręgowi, którego promieniem byłaby linia CF.

Powierzchnie koł. których promieniami są CA, i CB, równa się Trójkątom, CAD, i CBE, a zatem powierzchnia ko-

Ba

rony

rony równa będzie czworokątywi ABED. Przez G poprowadźmy równoodległą od AB, któraby spotkała AD w H, a BE w J; Troykąty prostokątne GDH, GEJ, mają boki GH. GJ. równe, i kąty równe, więc mogą przysłać do siebie; a zatym summa z Pięciokąta BEGHA, i z Troykąta GEI, to jest Prostokąt ABIH równa się summie z Pięciokąta BEGHA, i z Troykąta GDH, to jest, równa się czworokątowi BEDA. Aże ten czworokąt równy jest powierzchni korony, więc taż korona równa będzie prostokątowi ABIH, to jest prostokątowi, który ma szerokość korony za wysokość, a za podstawę. Okrąg w którym, promieniem jest średnia arytmetyczna proporcjonalna, między dwoma promieniami, czyli połowa summy tychże dwóch promieni.

397. Podobnie i różnica w kołach współśrodkowych, wycinków dwóch, zawartych między temiż samemi promieniami, równa się Prostokątowi mającemu za wysokość różnicę dwóch promieni, a za podstawę łuk podobny łukom wycinków dwóch danych, i należący do okrągu, którego promień, jest średnim arytmetycznym między promieniami tych dwóch wycinków.

I. Poka-

1. Pokazawszy, iż kwadrowanie koła, lub części jego, zawisło od wyprostowania jego okrągu; przytąpmy do szukania tego sprowadzenia.

Zadanie to aż raz był wstawione. za-trudniło wielu przypisujących sobie na-zwisko Geometrow, którym ledwie po-czątki Matematyki były znane, a i za-dania nawet samego nierozumieli. W-czym było omyłne ich rozumienie, ba-wić się nad tym, nie śladzę być rzeczą po-trzebną. Moga Nauczyciele, chcący mieć oszerniejszą w tej mierze wiadomość, czytać Montakli przemowę do *Hłoty o dochodze w kwadrowaniu koła* (*Histoire des recherches sur la quadrature du Cercle*). Dostć będzie powiedzieć, że treść tego zadania narym zawiła, aby wynaleść linią prostą równą okrągowi koła podanego. Nie rozumie się tu zaś równość piana, i zryśowa (jak ci niemaia, którzy koło zdawna lub zkruszcza wy-robione taczce po iakiej płaszczynie, mierzą długość linii, którą punkt ieden tego koła przebiegi; albo którzy koło iakie nicią okręcaia, i biorą potym dłu-gość tej nici; albo na koniec, którzy wa-ża takowe koło, i one porównywaia z kwadratem podobney materyi, i iednako-wey z kołem grubość) ale się rozumie

równość rmyślowa, czyli taka, o którey możnaby się przeświadczyć przez rozumowania podobne tym, jakich używaliśmy do dowiedzenia prawd, w tym przeciągu dzieła, wylatczonych.

398. Archimedes trzysta lat blisko przed Narodzeniem Chrystusa znalazł środek okrągu do średnicy, tak bliski prawdziwemu, że we zwyczajnych zdarzeniach jest doń takowy, a prawdziwym, i w używaniu wygodnym. Dowiedział on, że oznaczający średnicę koła przez r . Okrąg będzie większy, będzie niż 41 . a mniejszy niż 31 albo, że wyraziwszy długość średnicy przez 40 , okrąg będzie większy niż 1561 , a mniejszy niż 1562 ; uchybił on zatem byłby największy w części $\frac{1}{40}$ całego okrągu; a które, chociaż z tych ich do koła używamy, nap ostatecznego, ten wypadłby na środek 7 do 22.

Później po Archimedesie, wynaleziono sposoby krótsze, któremi dościsli się do koła, bardziej jeszcze zbliżonych do prawdziwych. I o tej nawet dokładności już przyшло, że wyraziwszy średnicę koła przez r , z zerami 127 przydatem, wyrażenie tego okrągu w liczbie złożonej

rey z tyl
bilen
go, a na
że liczy
ta d. b. d
nie no
czmor w
foirki n
kela do
P. Haych
de c. r. b.
Iworski
kele opłi
rievfze
riżeli
przez w
w. d. b.
miejce
wycaga
rachunek

399.
la przybi
puńce.

(g) A

ney z tyluż znaków liczelnych, z uchybieniem mniemnym od jedności ostatniego, a naymnięj w innych częściach także liczelnych. Spółobiektem doświadczenia z tą doki drosną wafłosci obrotu kół, nie może być w tych połączonych Uczniom wykładowy. Przynajmniej jednak flouarki niektóre wygodniejsze ścieżki cykła do drugiego wyjęte z kół, i fawego P. Huyghensowi wykładach w książce (de circuli magnitudine tractat) wywołując Dwaśfokła wypisanego w kół, i na kół opisanego, rozbraja wafłosci doświadczenia flouarki średnicy kół do drugiego, niżeli te kółnych części Archimedes przez wielokrotność 96 kół, wypłone w kół, i na tym opierał, ale na to miejsce rachunek Archimedesu, który wyraża poprzedzających pód, niżeli rachunek na dwunastokątne czyścicy.

399. Stofunki średnicy do okrągu kół przybliżone do prawdziwych, są następujące.

7	do 22.
100	do 314.
106	do 333.
113	do 355. (q)

Ponie-

(q) Największy trzy pierwsze niepa

Ponieważ stosunek powierzchni koła, do kwadratu średnicy jego, ten sam jest, co stosunek okręgu koła do średnicy czterzy razy wziętej: więc stosunki powierzchni koła do kwadratu średnicy będą następujące.

22 do 28, albo, 11, do 14.

314 do 400, albo 157, do 200.

333 do 424.

355 do 452.

Czyniąc przybliżenia dokładniejszy, lecz bardziey zawile, i używając sposobów, krotzych, ale początkowe wiadomości przechodzących, znaleziono, iż okrąg koła zawiera w sobie średnicę, razy 3.1415926535

Zkąd wynika stosunek powierzchni koła, do kwadratu średnicy, albo stosunek okręgu

rzył-dziczby 1. 3. 5. podwa razy, iednę przydrugiey, tak: 113355 liczba 113, zawierająca trzy pierwsze znaki, wyrażać będzie średnicę; liczba zaś 355. zawierająca trzy ostatnie znaki, wyrazi zmałym uchybieniem okrąg koła.

- Kola,
 - Am jest,
 - y czte.
 - wierz-
 - ła narze-

11.
200.

100.

dniewie,
ze po-
e wido-
no, iż o-
cę, razy

zobni ko-
stojnik

77. 12345
7. 113. 23-
11. 44. 13-
20. 555
1. 4. 11-
1011.

400

(r) *W trzecim Kłędzie Pamiętników (Mémoires) Matematycznych P. Lamberta, znajdując się wyborna Rozprawa (Dissertatio) o kwadrowaniu koła. Do-*

400. Z tego co poprzedzało, łatwo jest rozwiązać przez przybliżenie, następujące zagadnienia.

1. Mając daną średnicę koła, znaleźć jego okrąg.

2. Mając dany okrąg koła, znaleźć jego średnicę.

3. Mając daną średnicę koła, znaleźć jego powierzchnię.

4. Mając daną powierzchnię koła, znaleźć jego średnicę.

5. Znaleźć bok kwadratu równego kołu danemu.

Znajdujemy, iż stosunek średnicy koła do boku kwadratu równego temu kołu, jest, 200000, do 177246 $\frac{1}{2}$.

Ten stosunek przybliża się bardzo do stosunków następujących.

35	do	31.
44	do	39.
123	do	109.
157	do	148.

Ma.

wodzi tam (69) Autor, że jeżeli można by wyznaczyć stosunek dokładny, okręgu koła do średnicy jego, tedy liczby, któreby go wyrażały, nie byłyby być powinny od następujących, które ten stosunek przybliżony wyrażają to jest: 101951. 4486099146. do 324 511 540 032 945.

6. Mając dany promień koła, i ważność kątową tego łuku, (to jest w stopniach) znaleźć długość tego łuku, i powierzenię wycinka, proporcjonalną temu łukowi.

7. Mając dany promień koła, i ważność kątową łuku, znaleźć odcinek między tym łukiem i cięciwą jego.

Najpierw i następniej rozwiążemy to ostatnie zadanie, gdy w Trygonaście, który jest różnica między wycinkiem i odcinkiem wstawionym się na tymże promieniu, włożymy za różnicę łuku z promienia, a za wysokość wstawioną dany odcinek, albo i odwrotnie, że powierzenię koła, tak się ma do powierzeń odcinka (należyż go od koła) jak się ma okraj cały do różnicy między łukiem odcinka, i wstawą tego koła; i włożywszy sobie tabelę łuków koła, podług promienia tabeli Trygonometrycznych, łatwo przyjdzie rozwiązać to zagadnienie. (s)

8.

(s) Co się rozumie po obu ułożeniach tabeli, oraz przykłady dane w trygonometrze.

8. Znaleść przez przybliżenie wartość kątową łuku równiącego się promieniowi koła.

Przystosowanie tego zagadnienia często bywa używane w wyższych częściach Matematyki.

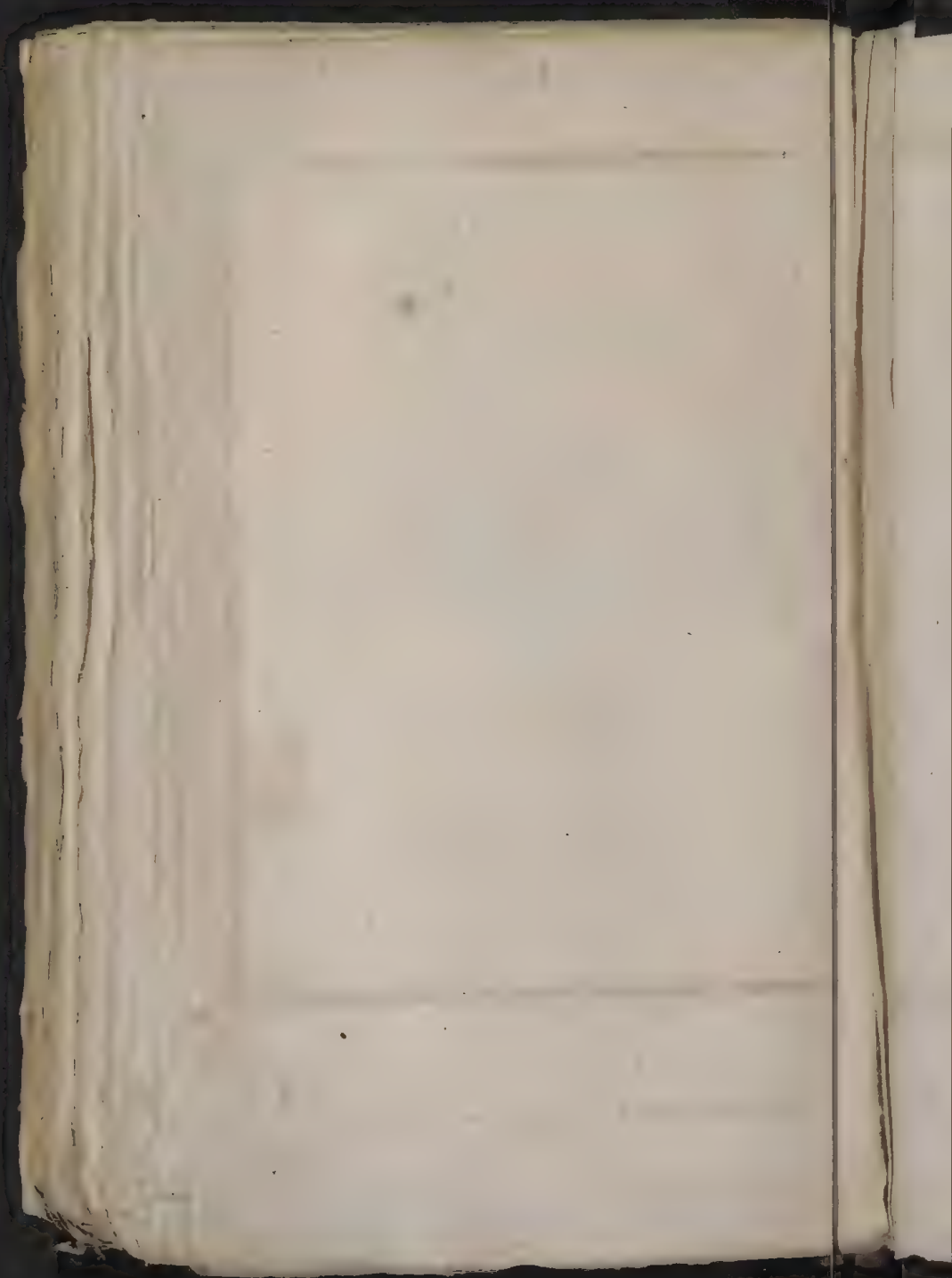


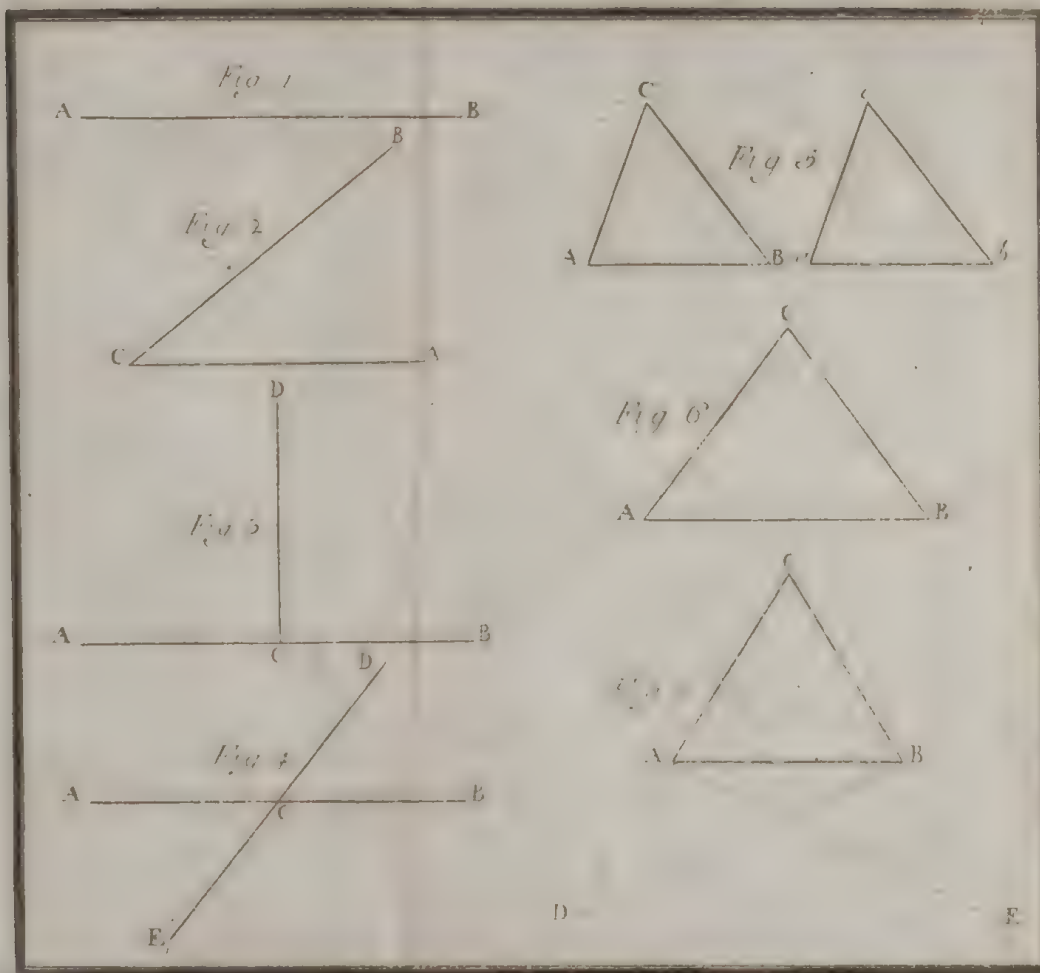
BIOLOGIA
V. 2. 1881.
GRACIENSIS

...
...

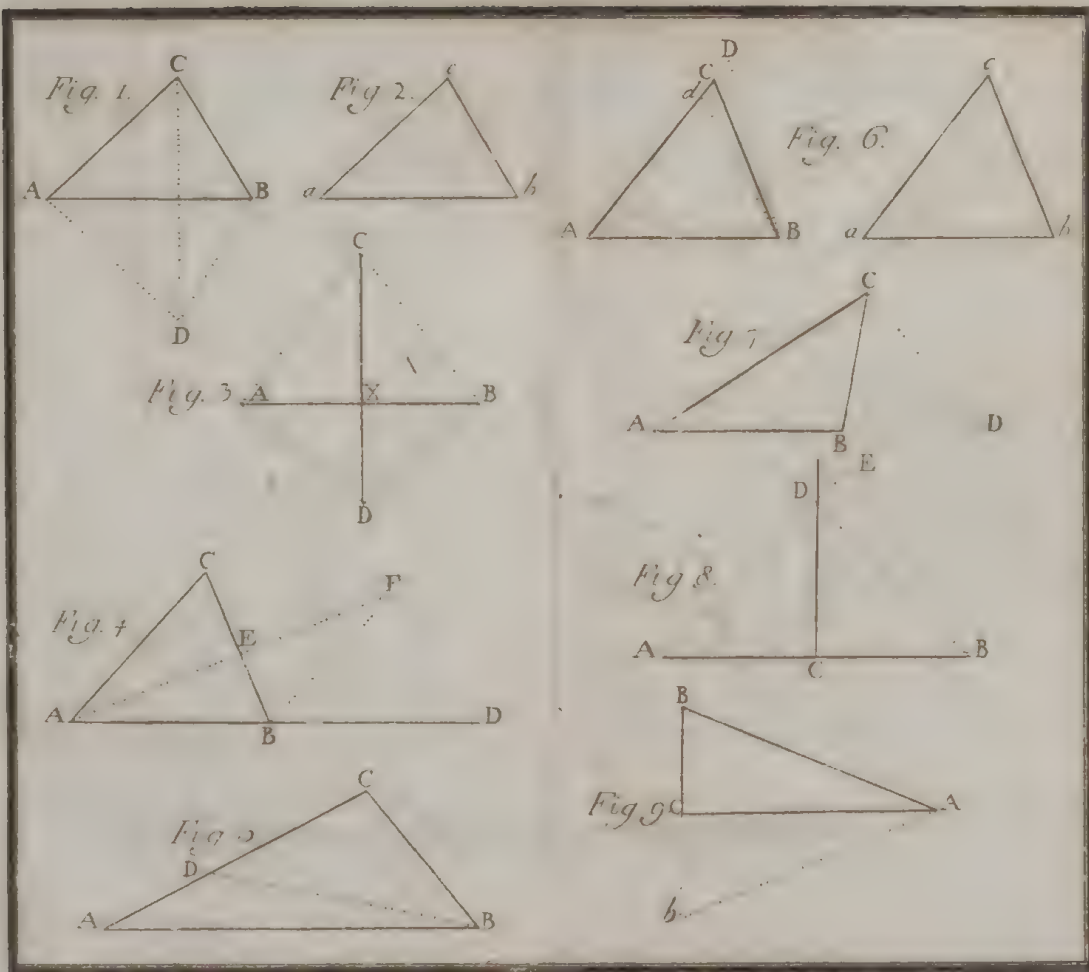
...
...

...

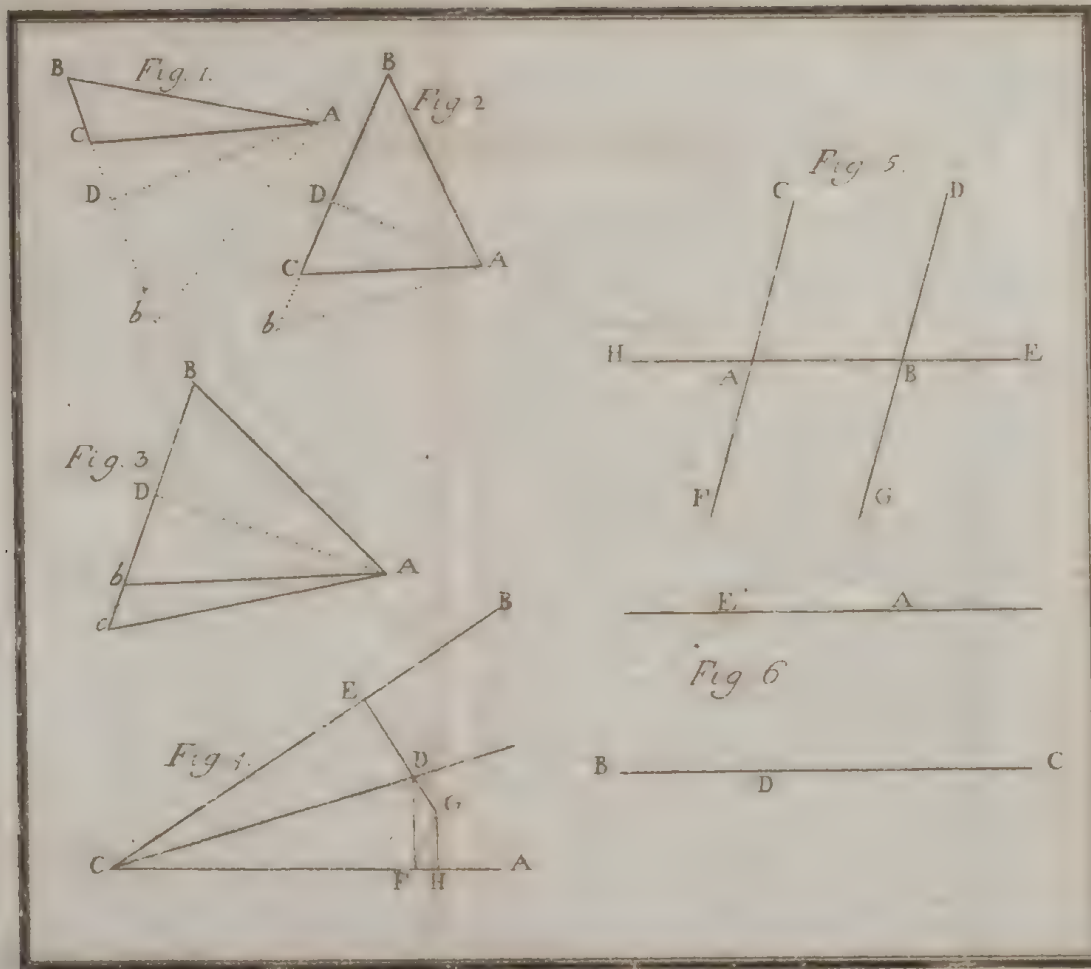




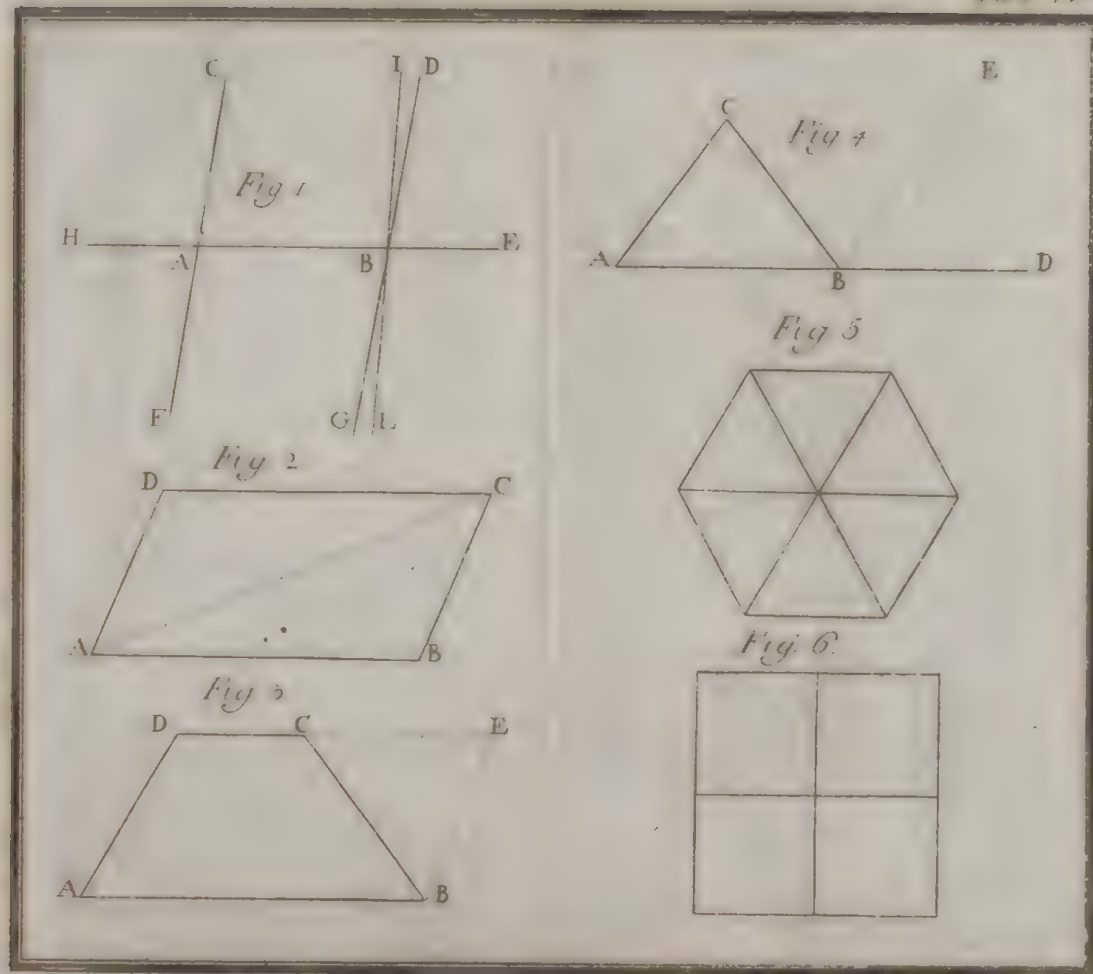
LIBRARY
OF THE
BIBLIOTHEQUE
NATIONALE
PARIS



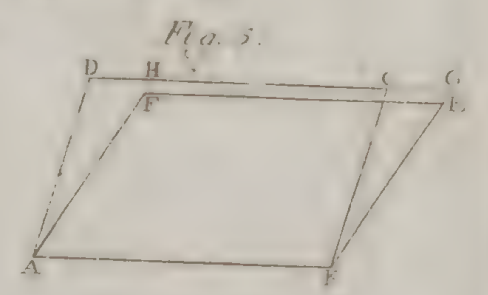
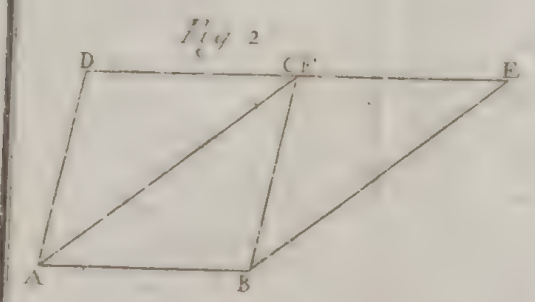
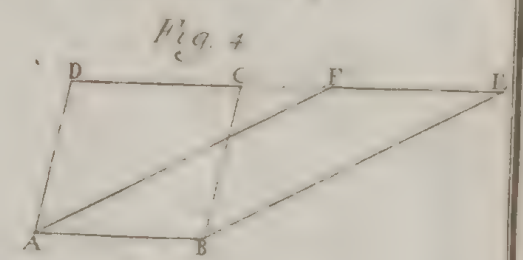
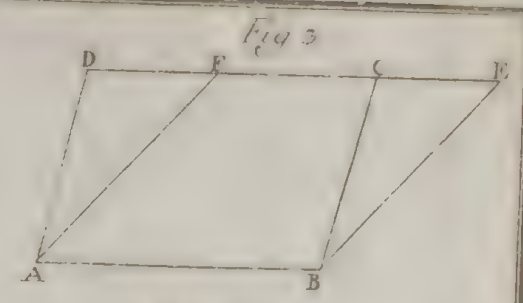
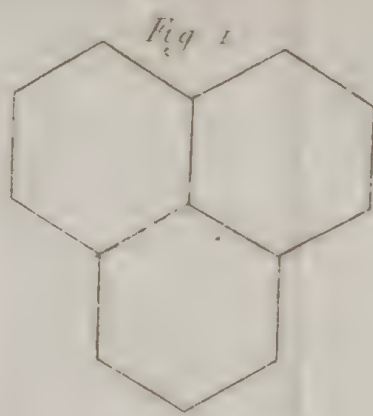
BIBLIOTHECA
VNI
BRACOVENSIS



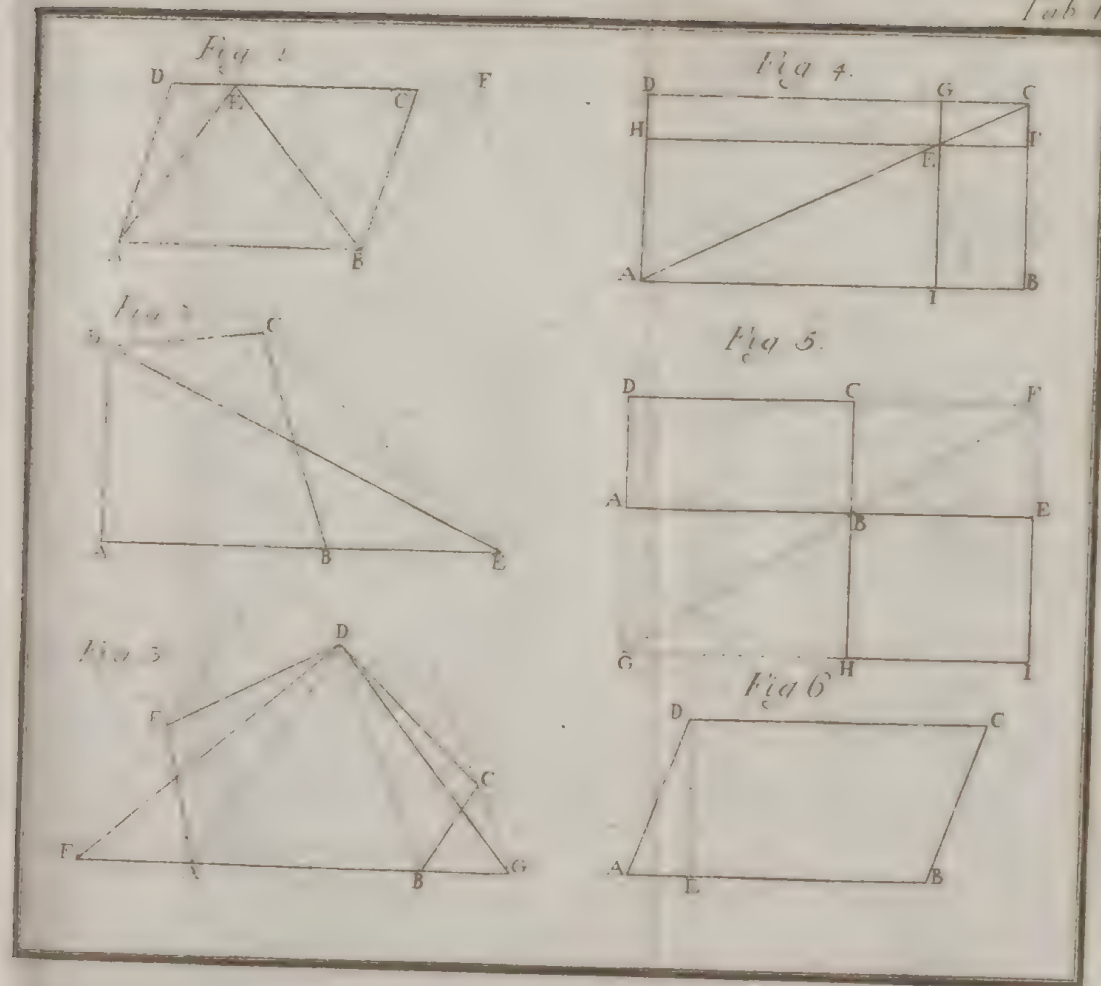
CIRCUIT COURT
HALL
PROVIDENCE



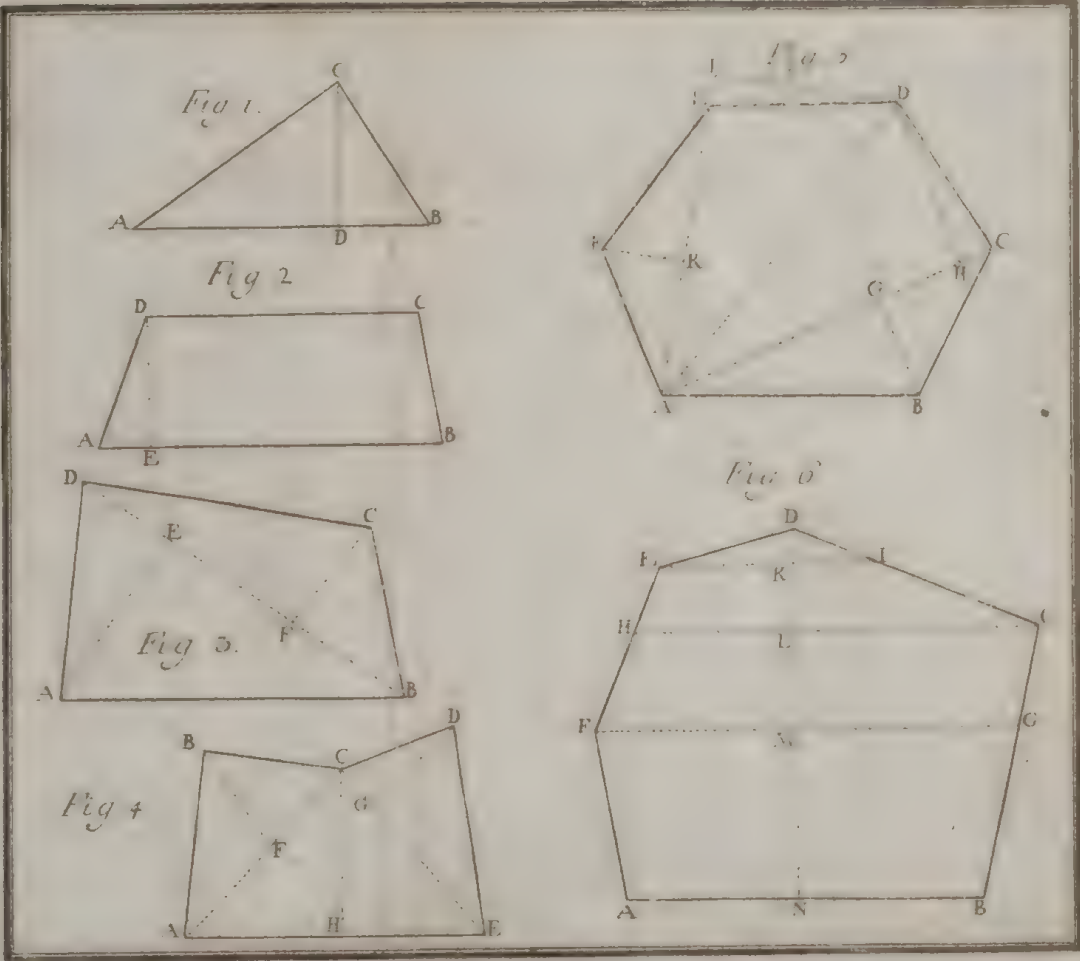
CRACOVIA
MUSEUM
CRACOVENSIS



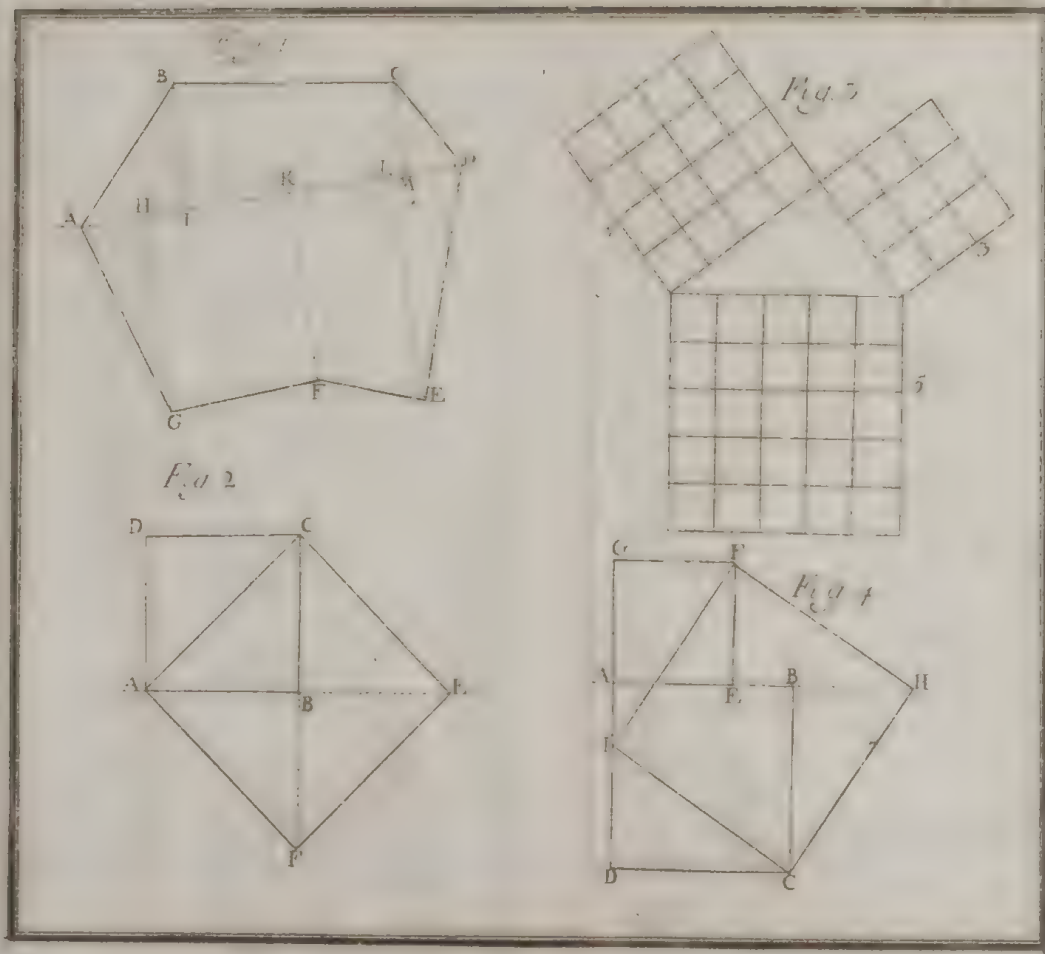
RECEIVED FOR
JAMES M. ALELL.
CRACKENBERRY

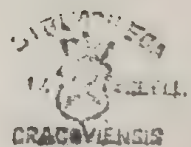


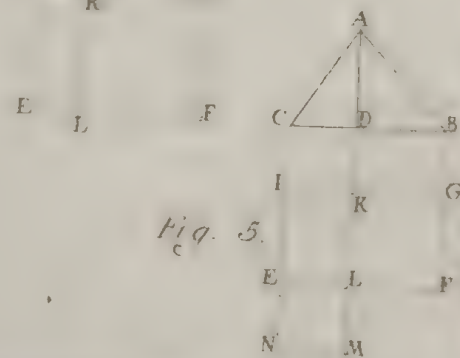
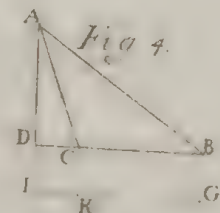
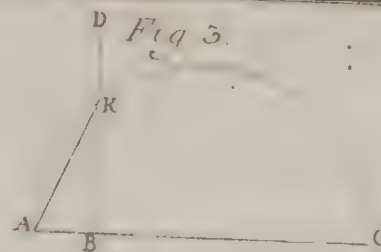
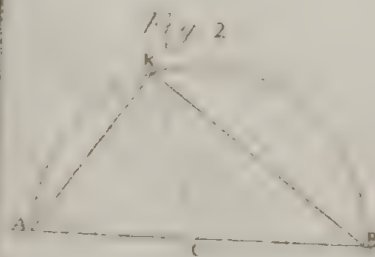
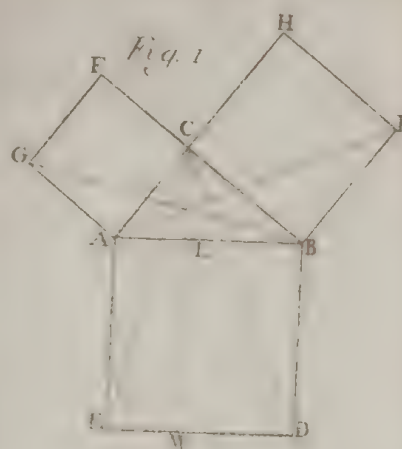
LIBRARY
MUSEUM
CRACOVENSIS



GRACOVENSIS
VIA AER. CELL.
GRACOVENSIS







LIBRERIA
VINCELLI
CRACOVENSIS

Fig. 1.

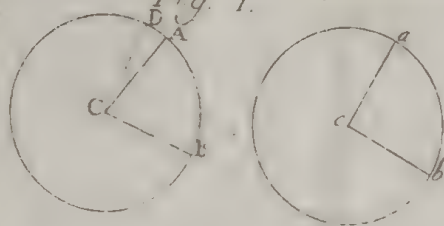


Fig. 2.

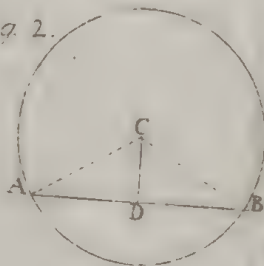


Fig. 3.

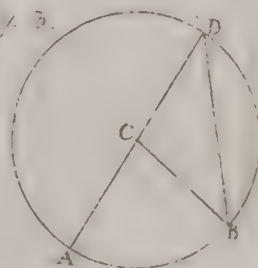


Fig. 4.

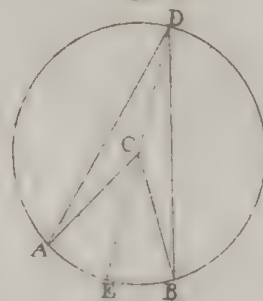


Fig. 5.

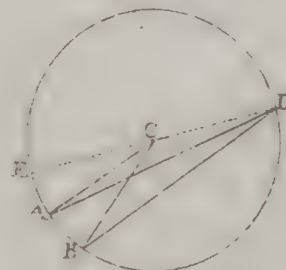
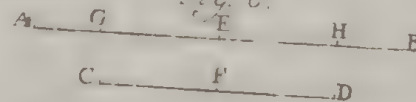
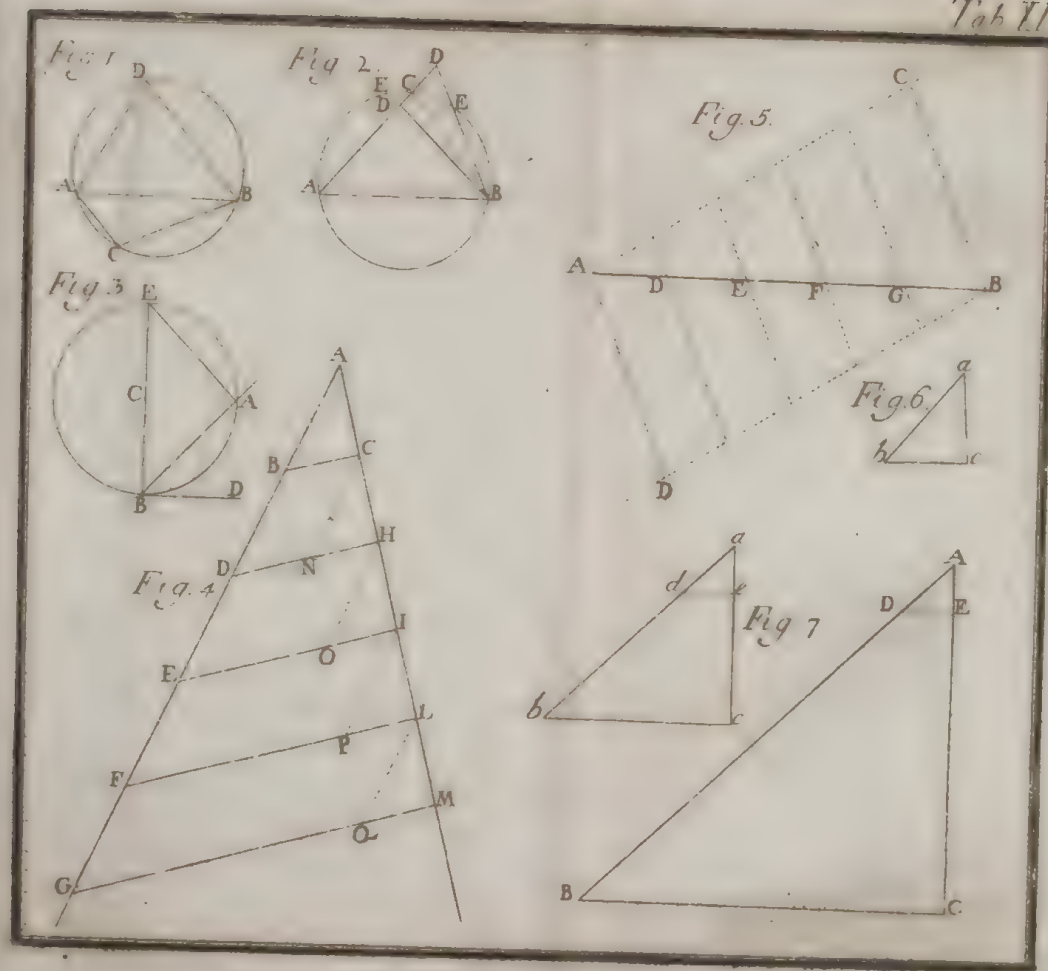


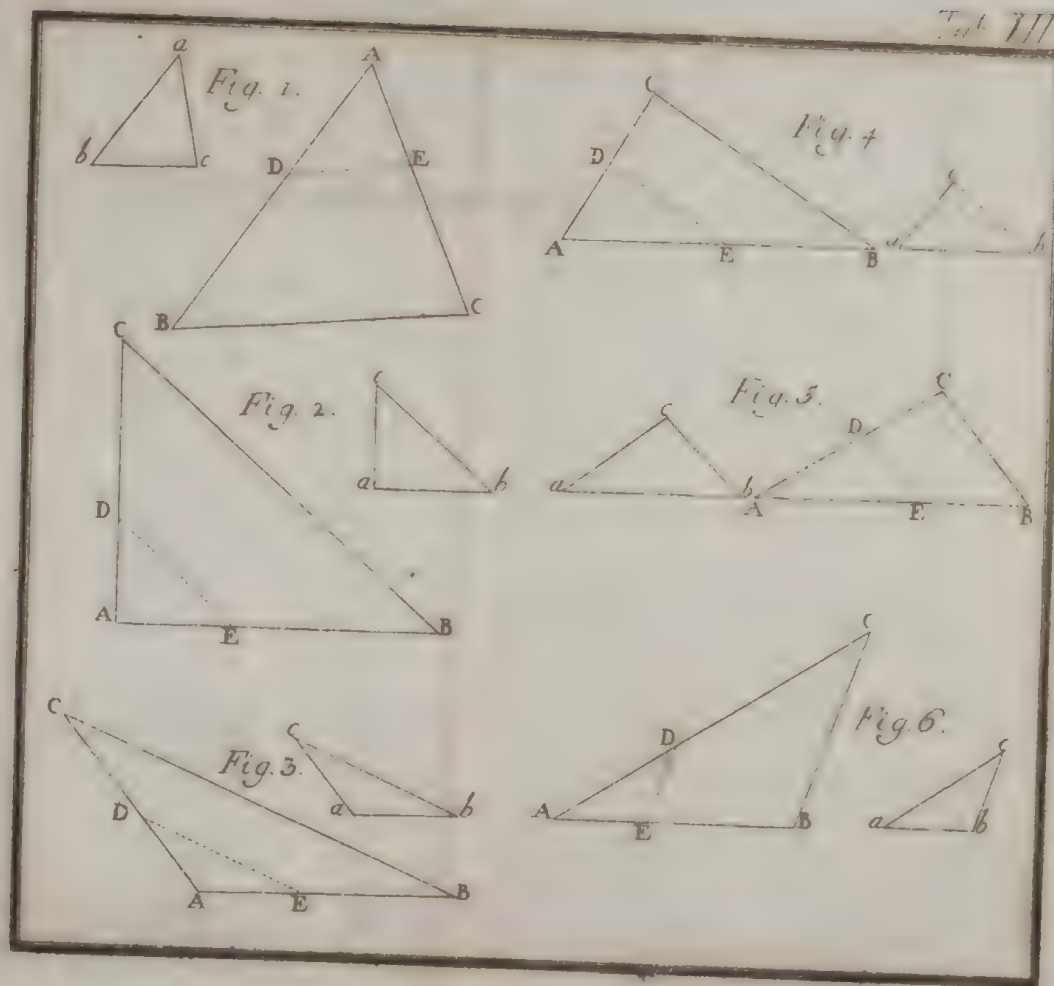
Fig. 6.



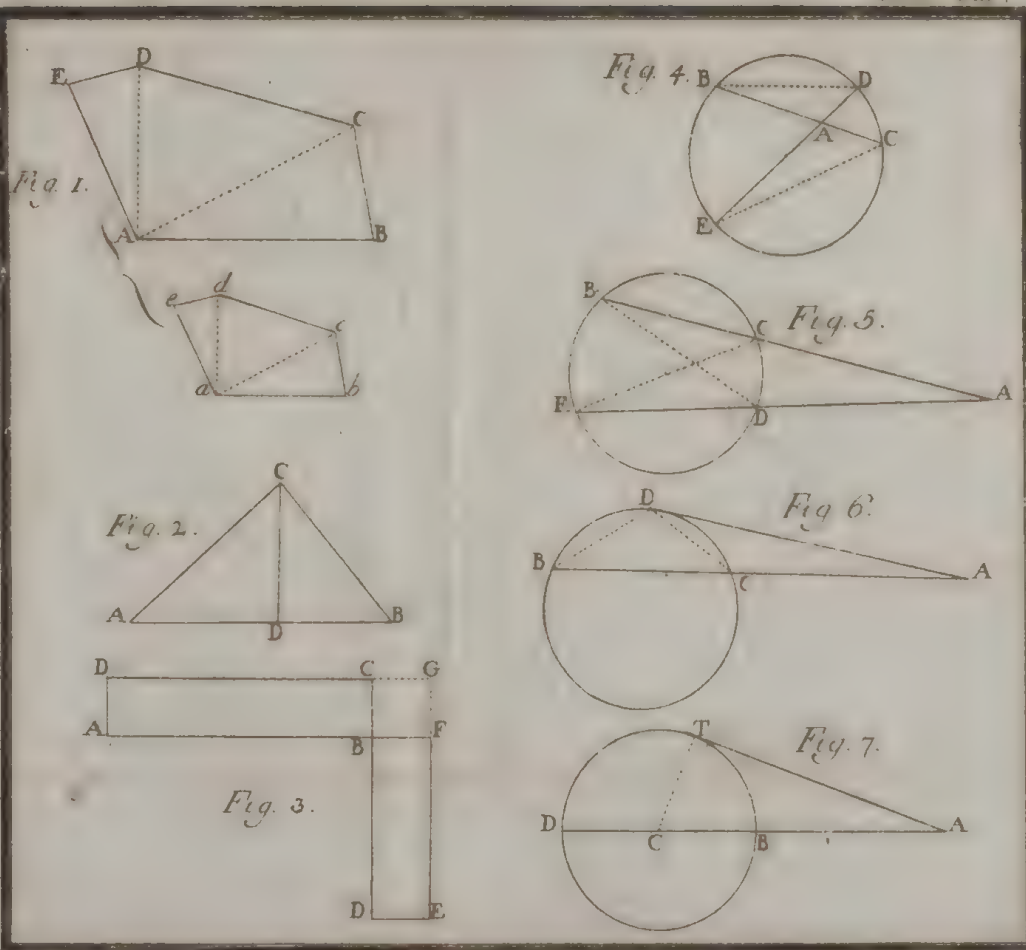




BIBLIOTHECA
UNIVERSITATIS
CRACOVENSIS







BIBLIOTHECA
VNI. AD. I. DELLI
CRACOVENSIS

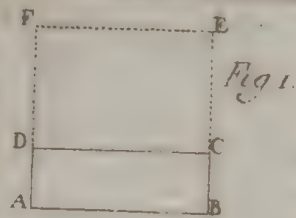


Fig. 2.

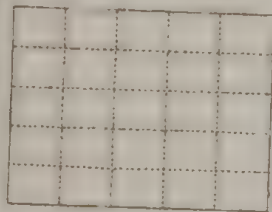


Fig. 3

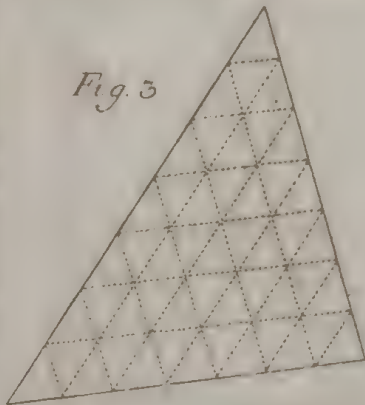


Fig. 4

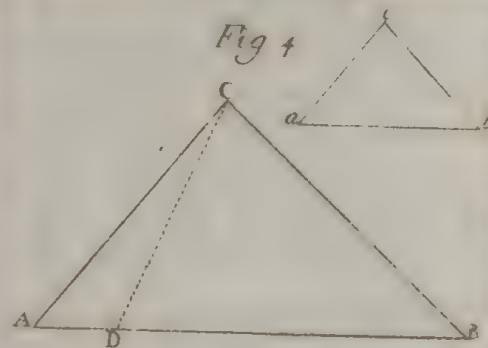
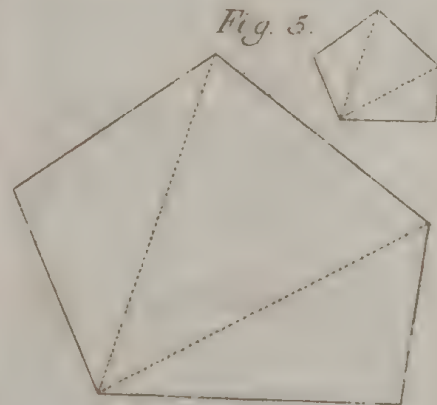


Fig. 5.



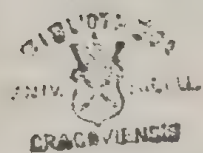


Fig. 1.

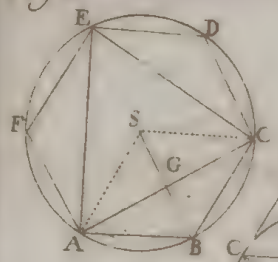


Fig. 2.

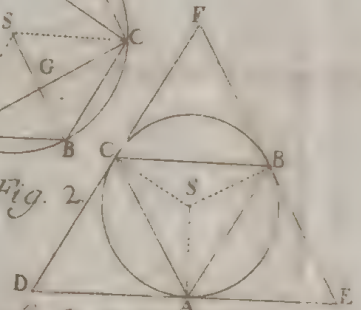


Fig. 3.

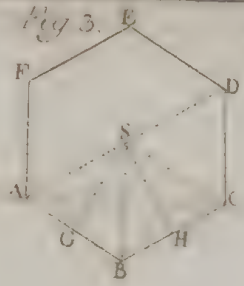


Fig. 4.

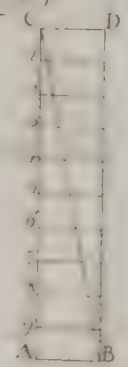


Fig. 5.

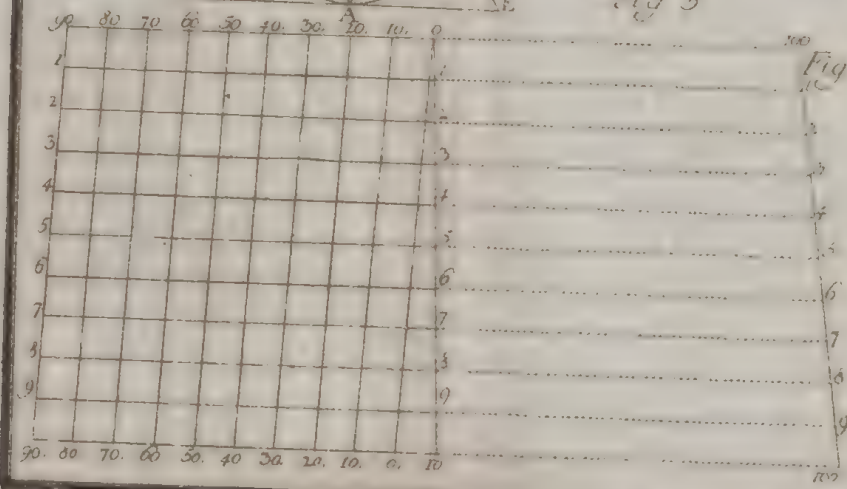
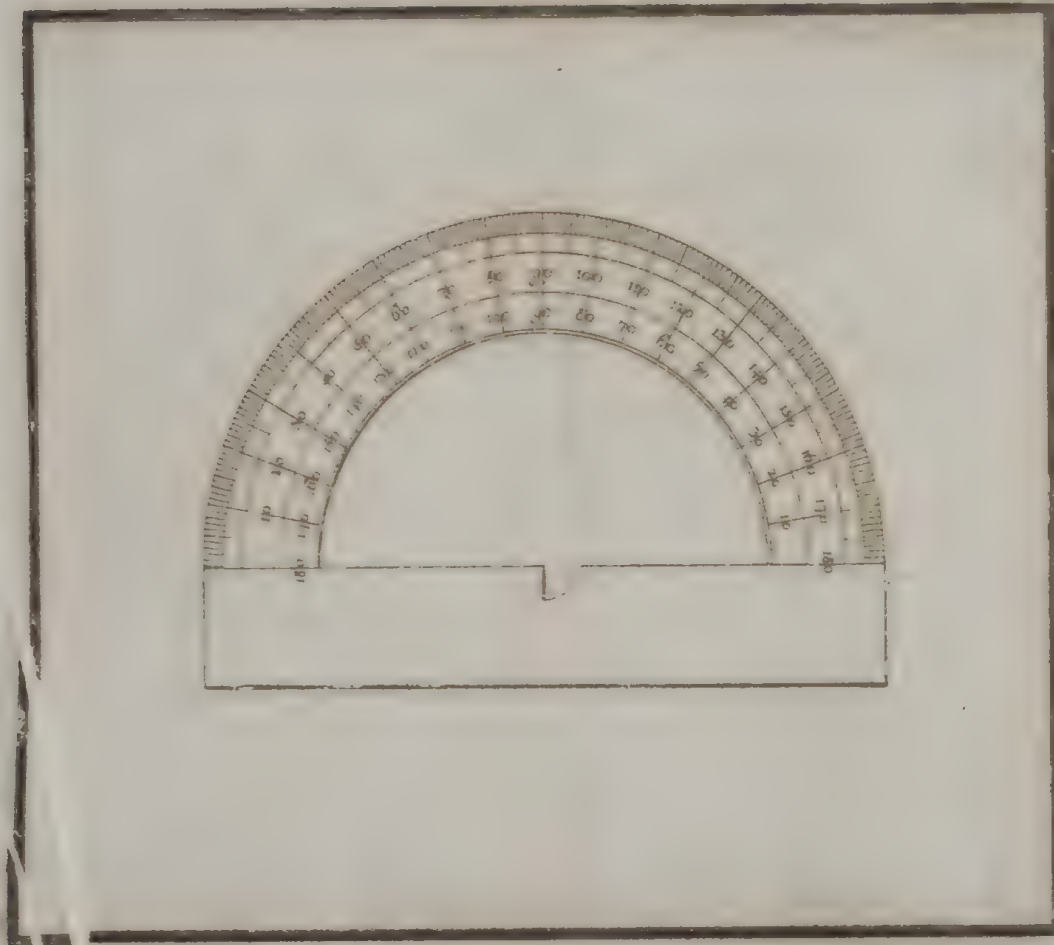


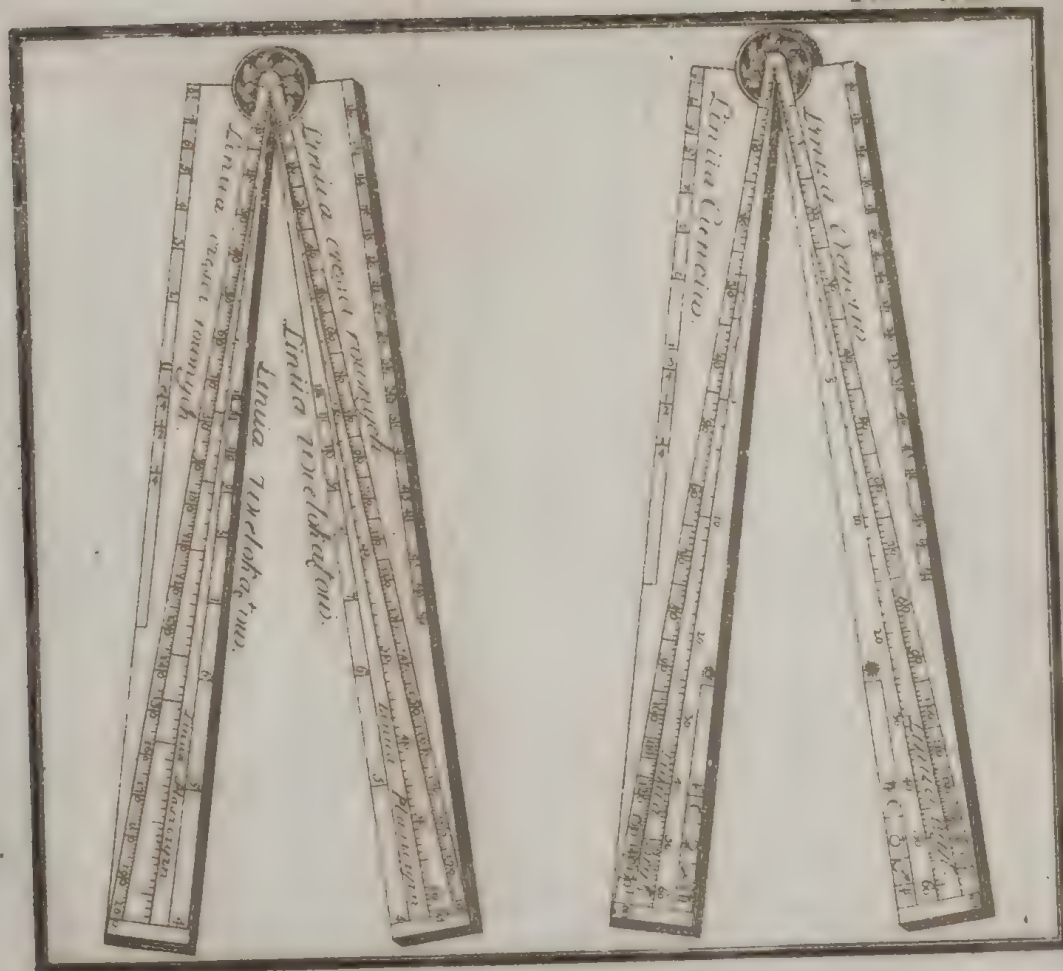
Fig. 6.



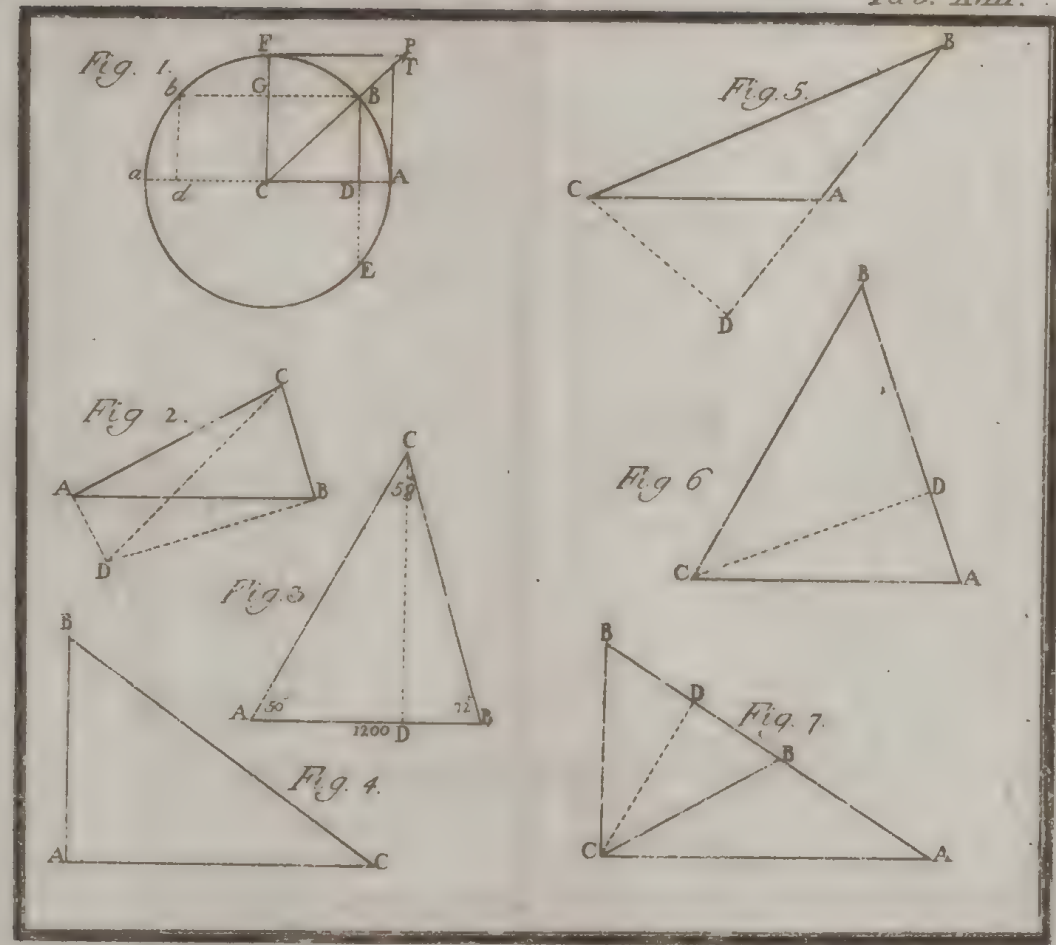
W. H. F. C. A.
H. H. H. C. E. L. L.
CRACSVILNOS



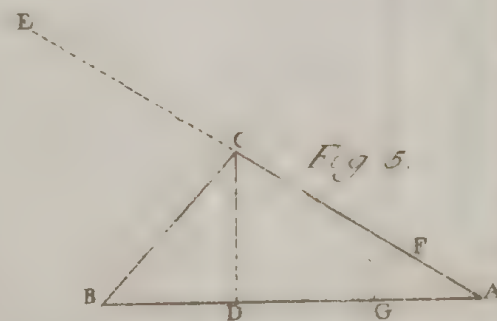
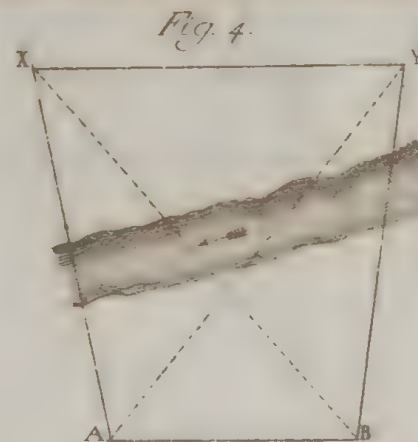
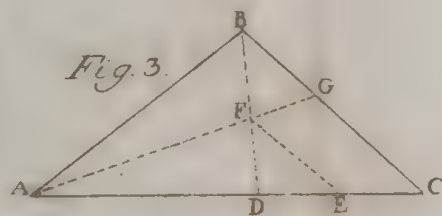
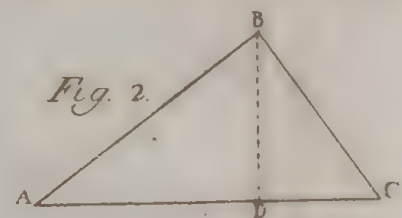
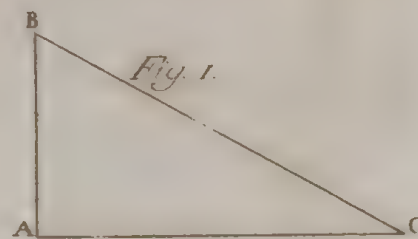
LIB. OTHECA
VNI. FACELL.
CRACOVENSIS



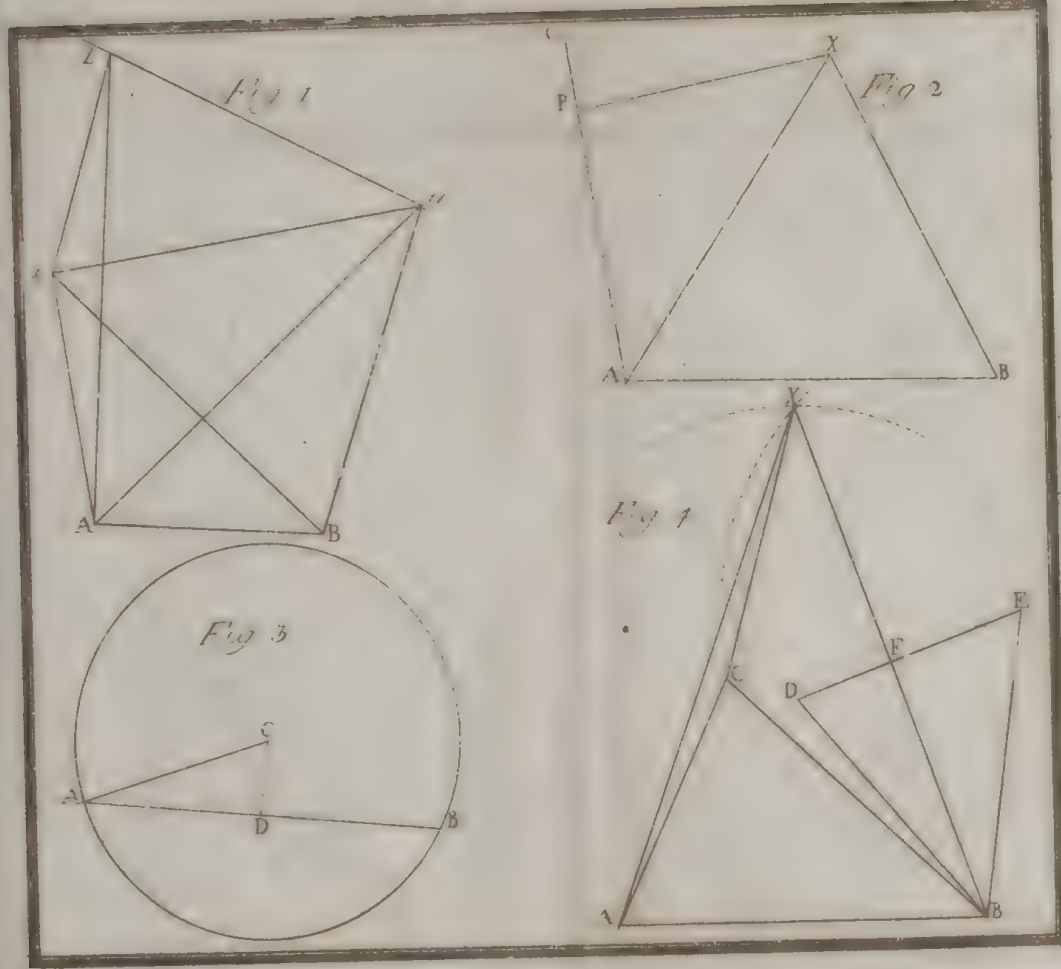




LIBR. MUSEI
V. B. J. FACELL
CRACOVENSIS



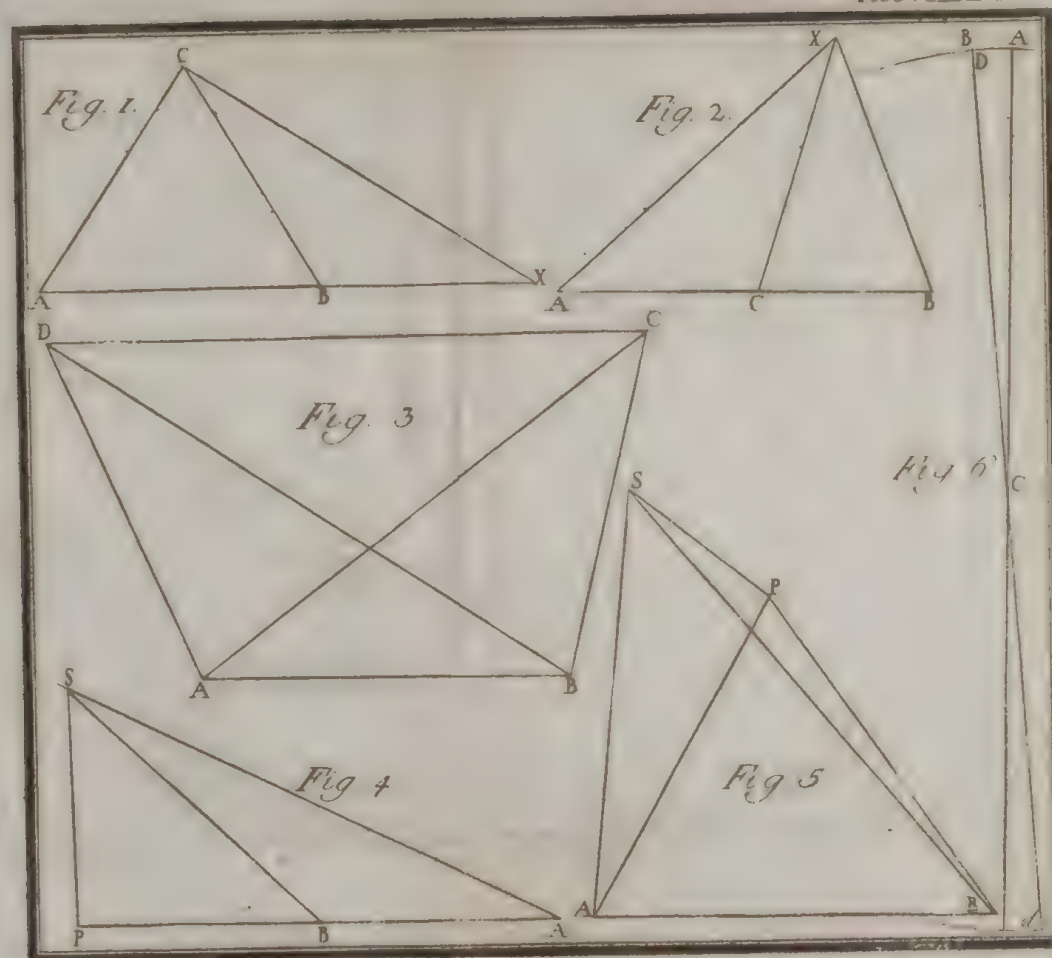
WILHELM
VON STRECKA
VON
GRACWIEN
1861



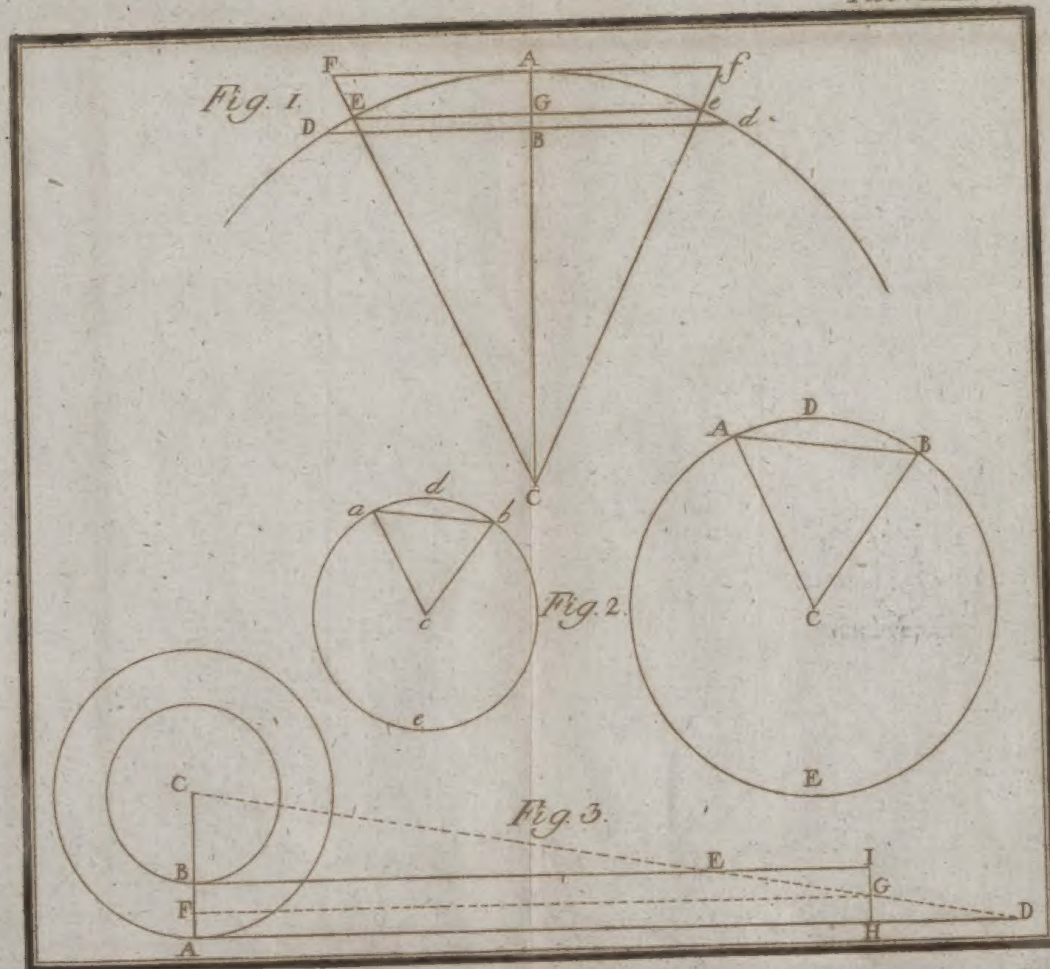


UNIVERSITATIS
VNI^{ERSITATIS} CRACOVIAE
CRACOVIAE

Tab. XXI.



BIBLIOTHECA
UNIVERSITATIS
CRACOVENSIS



UNIV. CRACOV. FACELL.
CRACOV. VIENSIS



...ta quantitate laxy, et quantitate lony, tu nizey w Instrukta-
rzu teraźniejszy naznaczoney (oprocz necessariorum z Gdańska
dla Szlachty, y Duchownych) iako nizey ofobną explicatur excepcya

1
rzu teraźniejszym naznaczoney (opócz *necessariorum* z Gdańska dla Szlachty, y Duchownych) iako niżej osobną explicatur excepccya,

Excepccya od Cła Generalnego. wyżej naniieniona.

POd to Cło Generalne nie mają podpadać zboża *omnis generis*, y wszelkie *viscualia*, iako to mąki, leguminy, Chleby, nabiały, y drob folwarczny &c. na Targi, na własną potrzebę *in Regno* prowadzone, także wszystkie własności Szlacheckie, Duchowne, y Ich poddanych (iako się wyżej namieniło,) *in Regno* sprzedawane, iako też woły, konie, podiezdki robocze, krowy &c. na swoje potrzebę między ludźmi Krajowemi kupowane. Tudzież różne *necessaria* z Gdańska wyrowadzone, które powinien każdy Szyper czyli Kommissant według Prawa przy Aufszczugu lub *attestationum* ręką Pańską podpisanym, y Pieczęcią stwierdzonym zaprzyściąg, *juxta Rotam* w Instrukturu *descriptam*, iako te nie na sprzedaż, ani na żaden handel pod iakimkolwiek pretextem sprowadza, ale na własną potrzebę Pańską; Cokolwiekv zaś nad podpisany ręką Pańską Aufszczug, czyli *attestationum*, po-

